TRASFORMATA DI FOURIER

Data un funzione f(t) reale o complessa si definisce la sua trasformata di Fourier, TF, la funzione F(jω) che soddisfa:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

Qualora l'integrale esista. In tale caso vale la corrispondenza inversa, teorema:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

Vale a dire che esiste una corrispondenza biunivoca tra le 2 funzioni:

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

Da queste proprietà scendono un sacco di conseguenze.

Prima di tutto l'aspetto 'fisico'. Si ricorda che:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

Quindi: f(t) può essere considerata come una somma di funzioni sinusoidali exp(jωt) pesate ognuna con peso F(jω)/2π. Per questa ragione F(jω) è spesso detta 'spettro di f(t)'.

……….trasformata di Fourier, 2

Vediamo di riassumere le proprietà più importanti, quelle che serviranno per il contesto che stiamo affrontando.

Va subito detto che le trasformate si usano per tabelle, per cui solo raramente occorrerà fare ricorso alla soluzione dell'integrale con cui sono costruite.

Solo in questo modo la loro utilità diviene palese e serviranno per estendere agevolmente la soluzione delle nostre reti circuitali anche in presenza di equazioni differenziali, introdotte con l'uso dei condensatori ed induttori, quindi dei transistori e del compartimento reale degli OA.

Cominciamo senz'altro…

Una delle prime proprietà che aiuta a semplificare le cose riguarda il fato che le nostre funzioni nel dominio del tempo sono solo reali. Quindi:

Le nostre funzioni f(t) apparterranno al campo reale.
Abbiamo subito la seguente proprietà che segue dal fatto che $f^*(t)= f(t)$ (f^*= complesso coniugato di f):

$$F^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)e^{j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega t}\,dt = F(-j\omega)$$

Inoltre se f(-t)=f(t) risulta:

$$F^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega t}\,dt \overset{u=-t}{=} -\int_{+\infty}^{-\infty} f(-u)e^{-j\omega u}\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt = F(j\omega)$$

Ovvero F(jω) è reale.

Viceversa se f(-t)=-f(t) F(jω) risulta puramente immaginaria.

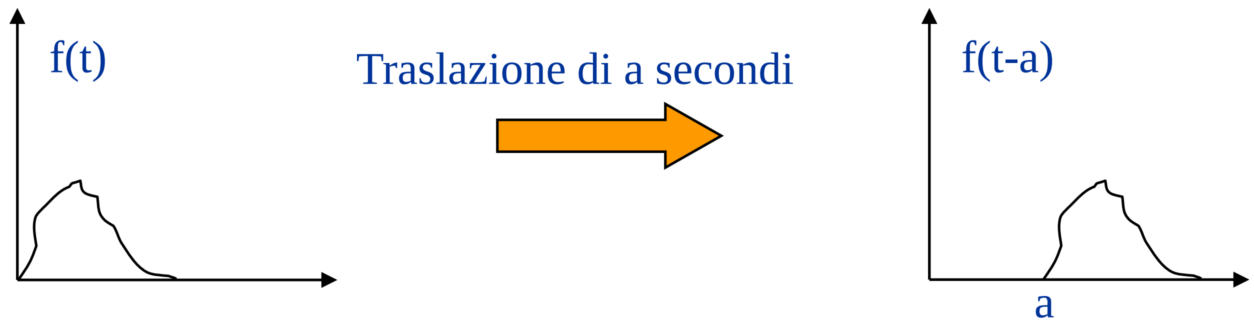
Per ogni numero a reale vale che:

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

Invero questa proprietà riguardante la dilatazione dei tempi non è molto sfruttata in elettronica.

Viceversa….

Proprietà importante: traslazione temporale:



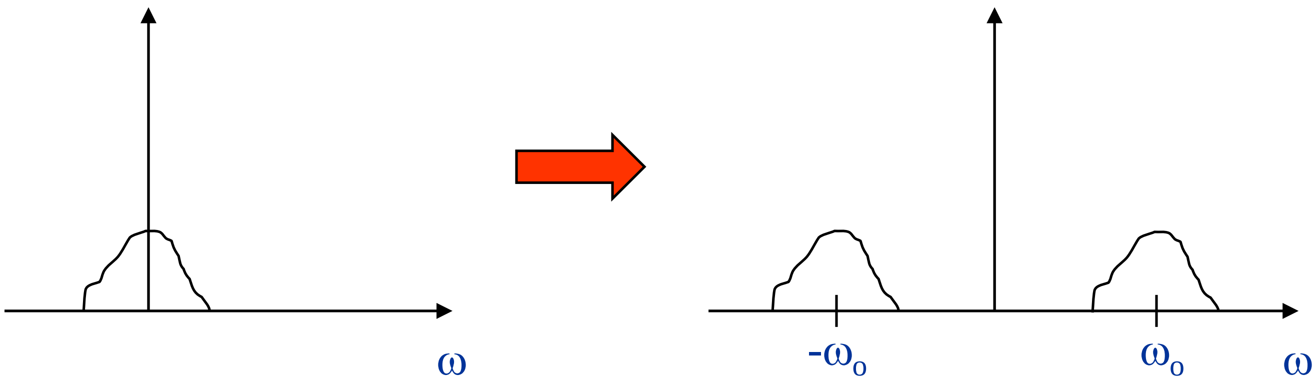
$$f(t-a) \leftrightarrow F(j\omega)\, e^{-j\omega a} \qquad \text{ed anche} \qquad e^{jat} f(t) \leftrightarrow F\big(j(\omega - a)\big)$$

Applicazione la modulazione in frequenza:

Sfruttando il fatto che $\quad e^{jat} f(t) \leftrightarrow F\big(j(\omega - a)\big) \quad$ si ha:

$$f(t)\cos(\omega_o t) = f(t)\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}\right)$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{2}\left[F\big(j(\omega + \omega_o)\big) + F\big(j(\omega - \omega_o)\big)\right]$$



Proprietà importante: il teorema di CONVOLUZIONE

Supponiamo che la risposta di sistema ad una eccitazione δ(t) sia rappresentabile con la funzione h(t).
Quale potrebbe essere la risposta ad una generica eccitazione f(t)?

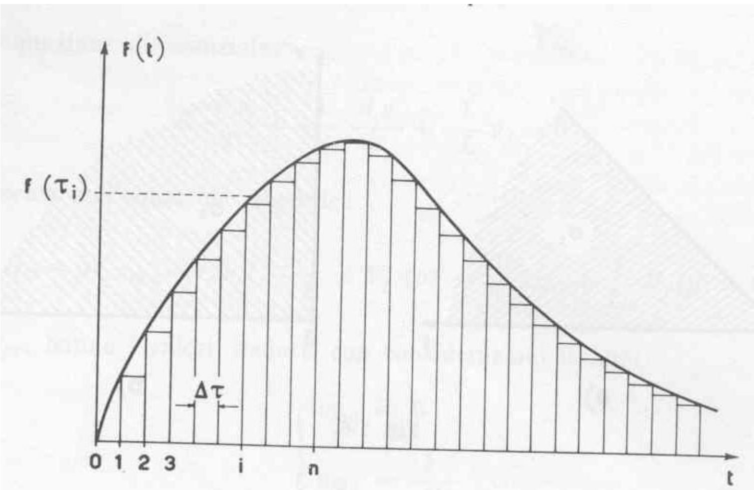


Fig. 1-5.

Possiamo supporre la f(t) divisa in tanti rettangolini larghi ognuno Δτ. Se Δτ è sufficientemente piccolo possiamo pensare che f(τ) Δτ sia approssimabile con una δ(t), ovvero:
f(τ) Δτ δ(t-τ).
La risposta del sistema sarà perciò:
f(τ) Δτh(t-τ).

Quindi la risposta del sistema U(t) all'eccitazione f(t) risulta:

$$U(t) = \sum_i f(\tau_i)\Delta\tau_i h(t-\tau_i) \xrightarrow{\Delta\tau_i \to 0} \int_{-\infty}^{t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

(assumiamo qui che f(t) sia definita in (- ∞, ∞), mentre h(t) sia definita in (0, ∞)

La quantità:

$$f(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

è detta convoluzione di f(t) con h(t), complicata nel dominio del tempo.

Ebbene vale che:

$$f(t)*h(t) \leftrightarrow F(j\omega)H(j\omega)$$

Il teorema di CONVOLUZIONE è fondamentale in elettronica.

Un qualsiasi circuito, costituito da amplificatori, resistori, capacità, induttori, si risolverà sempre a partire da un sistema di equazioni lineari.

La loro soluzione non è nient'altro che la risposta alla $\delta(t)$ della rete. Per cui, una volta calcolato la soluzione del sistema, ovvero quello che viene chiamata funzione di trasferimento del sistema, ovvero il rapporto tra tensioni e correnti tra 2 nodi, è possibile risalire alla risposta del sistema a qualsiasi eccitazione attraverso la convoluzione.

Cioè se TF(s) è la funzione di trasferimento tra 2 nodi di interesse, v_o e v_i, risulta, $s=j\omega$:

$$v_o = TF(s)v_i$$

Se ora v_i assume un andamento f(t) avente trasformata F(s), risulta:

$$v_o = TF(s)F(s)$$

Altro teorema importantissimo: il teorema della derivata

Al solito da:
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

Vale:
$$\frac{d^n f(t)}{dt^n}\leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

$$\frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n}\leftrightarrow (-jt)^n f(t)$$

… e quello dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{t} f(t)dt \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

Questi 2 teoremi ci consentiranno di trasformare sistemi di equazioni differenziali nel dominio del tempo, legati alla presenza nella rete di induttanze e capacità, a sistemi di equazioni lineari nel dominio della frequenza.

Con la trasformata di F. nel dominio della frequenza rimane un termine in δ(s), legato alla condizione iniziale. Questo «fastidio» viene eliminato adottando la trasformata di Laplace, come vedremo tra pocoo.

Considerazioni sulle funzioni fondamentali:

$$\delta(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t}\, d\omega \equiv \; 1$$

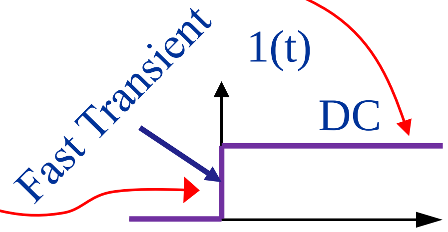
Importantissimo: la funzione 'difficile' δ(t) viene trasformata in una funzione costante su tutto l'asse delle frequenze. Fisicamente la cosa e' coerente, infatti la δ(t) e' definita per avere un valore solo in t=0, per cui ci si aspetta che sia rappresentata in tutto il campo delle frequenze.

Come conseguenza è valido l'inverso: $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega$

$$\delta(t) \quad \leftrightarrow \quad 1$$

……….trasformata di Fourier, 8

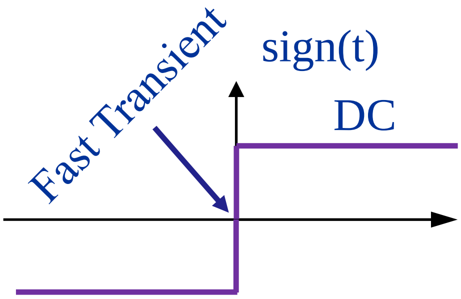
Funzione importante: $1(t) \rightarrow \pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{j\omega}$



La 1(t) è una funzione di test importante in laboratorio perché contiene tutte le componenti spettrali: la transizione veloce contiene tutte le informazioni ad alta frequenza, mentre la parte patta la componente in continua.

Anche qui nella TF abbiamo la presenza delle distribuzione nel dominio della frequenza; distribuzione legata alla condizione iniziale: la 1(t) è l’integrale della δ(t) ed ha una componente continua. Ancora, nella T di Laplace questa distribuzione svanisce.

Altra proprietà.: $\dfrac{1}{j\omega} \leftrightarrow \dfrac{\mathrm{sign}(t)}{2}$



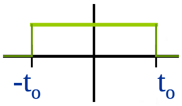
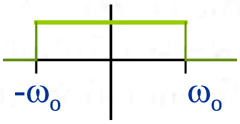
Riassumendo le proprietà della Trasformata di Fourier:

TABLE 2.3. Key Properties of the Fourier Transformation

Time Function	Fourier Transform
$f(t)$	$F(j\omega)$
$df(t)/dt$	$j\omega F(j\omega)$
$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{j\omega}F(j\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$
$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(j\omega)F_2(j\omega)$
$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2\,dt$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(j\omega)\rvert^2\,d\omega$
$f(t - t_0)$	$F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(j\omega - j\omega_0)$
$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$	$k_1 F_1(j\omega) + k_2 F_2(j\omega)$

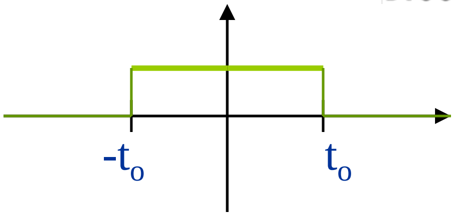
Qualche esempio:

TABLE 2.4. Some Commonly Used Fourier-Transform Pairs

$f(t)$	$F(j\omega)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
 $\begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < t_0 \\ 0, & \lvert t\rvert > t_0 \end{cases}$	$(2/\omega)\sin \omega t_0$
$\frac{\sin \omega_0 t}{\pi t}$	$\begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < \omega_0 \\ 0, & \lvert\omega\rvert > \omega_0 \end{cases}$ 
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$
1	$2\pi\,\delta(\omega)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi\,\delta(\omega - \omega_0) + \pi\,\delta(\omega + \omega_0)$
$\sin \omega_0 t$	$-j\pi\,\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\,\delta(\omega + \omega_0)$

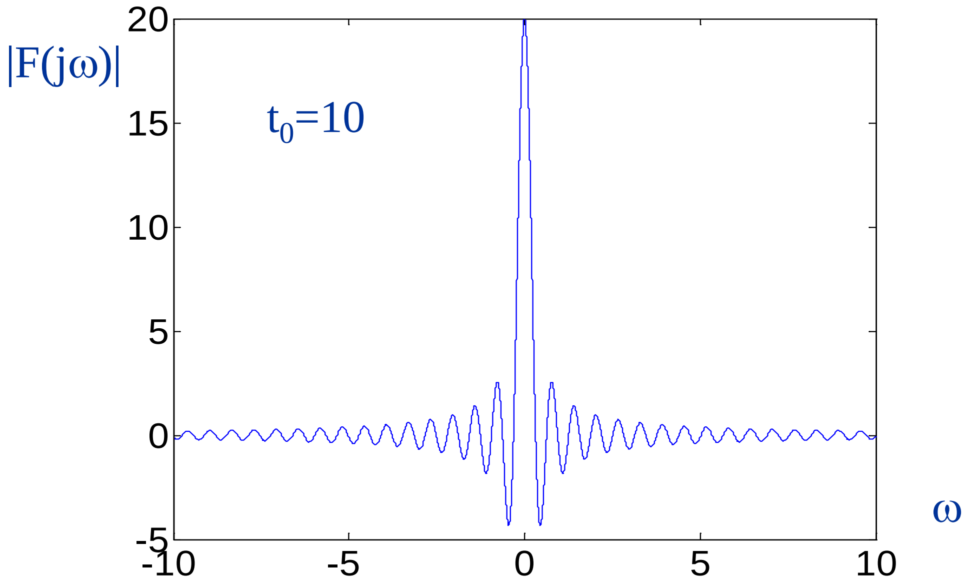
Es.

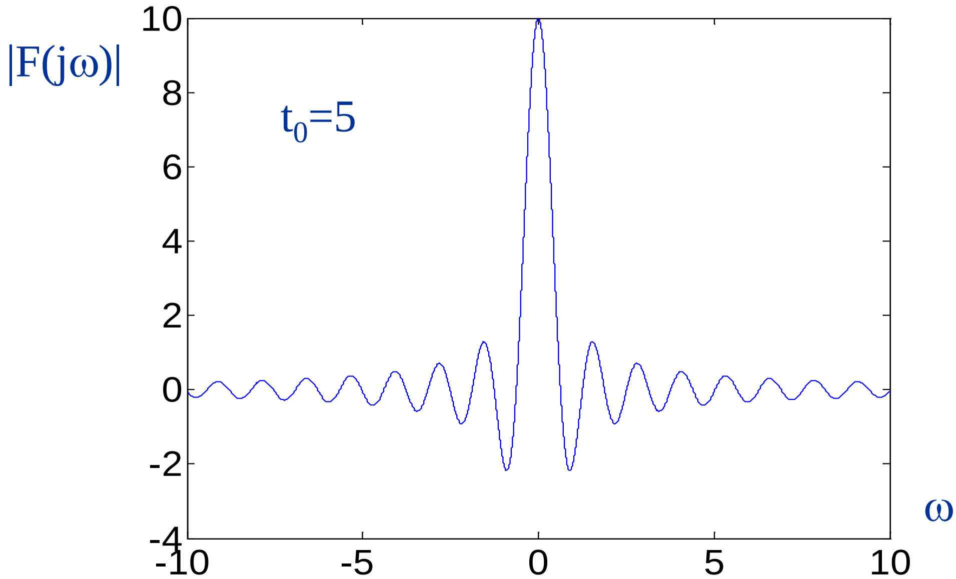
$$f(t) = \begin{cases} 1 \;\; \text{se} \;\; -t_o < t < t_o \\ 0 \;\; \text{se} \;\; t > t_o \;\; \text{oppure} \;\; t < -t_o \end{cases}$$



Ovvero f(t) è meglio esprimibile come: $g(t)=[1(t+t_o)-1(t-t_o)]$

$$F(j\omega) = \int_{-t_o}^{t_o} e^{-j\omega t}\, dt = -\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\Big|_{-t_o}^{t_o} = 2\,\frac{e^{j\omega t_o} - e^{-j\omega t_o}}{2j\omega} = 2\,\frac{\sin(\omega t_o)}{\omega}$$





……….trasformata di Fourier, 11

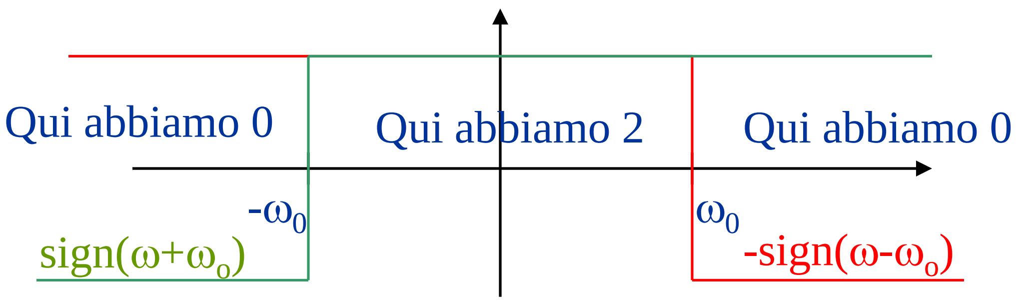
Da. $$f(t) = \frac{\sin(\omega_o t)}{\pi t} = \frac{e^{j\omega_o t}}{2j}\frac{1}{\pi t} - \frac{e^{-j\omega_o t}}{2j}\frac{1}{\pi t}$$

Si ha: $$F(j\omega) = -\frac{1}{2}\mathrm{sign}(\omega - \omega_o) + \frac{1}{2}\mathrm{sign}(\omega + \omega_o)$$

Prof:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega_o t)}{\pi t} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{2j}\mathrm{Trasf.}\left(\frac{1}{\pi t}\right)\Bigg|_{\omega-\omega_o} - \frac{1}{2j}\mathrm{Trasf.}\left(\frac{1}{\pi t}\right)\Bigg|_{\omega+\omega_o}$$

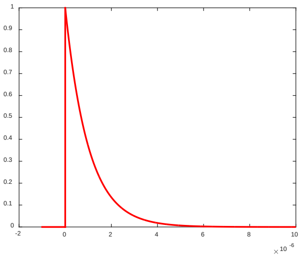
Ma: $$\mathrm{Trasf.}\left(\frac{1}{\pi t}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\omega t}}{\pi t} dt = -j\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\pi t} dt = -j\,\mathrm{sign}(\omega)$$



$$F(j\omega) = \begin{cases} 1 \ \text{ se } \ -\omega_0 < \omega < \omega_0 \\ 0 \ \text{ se } \ \omega > \omega_0 \ \text{ oppure } \ \omega < -\omega_0 \end{cases}$$

Ovvero: $$F(j\omega) = 1(\omega + \omega_o) - 1(\omega - \omega_o)$$

……….trasformata di Fourier, 12



Es.

$$f_1(t) = 1(t)e^{-at} \quad e \quad f_2(t) = e^{-a|t|} \quad con \quad a > 0$$

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}1(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(j\omega+a)t}\,dt = -\frac{e^{-(j\omega+a)t}}{j\omega + a}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{j\omega + a}$$

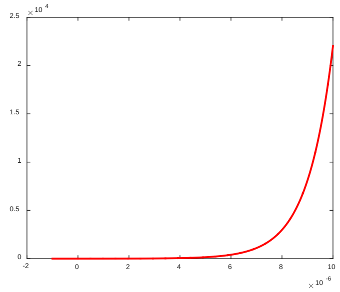
Invece:

$$F_2(\omega) == \frac{2a}{(a^2 + \omega^2)}$$

E anche:

$$1(-t)e^{at} = f_1(-t) \Rightarrow Tras.(1(-t)e^{at}) = F_1(-j\omega) = F_1^*(j\omega) = \frac{1}{-j\omega + a}$$

Es.



$$f_3(t) = 1(t)e^{at} \quad a > 0$$

$$F_3(\omega) = \frac{1}{j\omega - a}$$

Perciò:

$$f_1(t) = 1(t)e^{-at} \quad \text{con} \quad a > 0 \quad \rightarrow F_1(\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

Il denominatore si annulla per jω=-a, cioè polo <0

$$f_1(t) = 1(t)e^{at} \quad \text{con} \quad a > 0 \quad \rightarrow F_1(\omega) = \frac{1}{j\omega - a}$$

Il denominatore si annulla per jω=a, cioè polo >0

Considerazione importante:

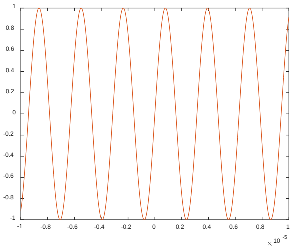
Poli reali negativi implicano risposta convergente a t=∞;

Poli reali positivi implicano risposta divergente a t=∞.

Questo significa che stando nel dominio delle frequenze siamo in grado di capire se la risposta di un sistema è convergente o divergente. Vedremo tra poco che questo è molto importante.

……….trasformata di Fourier, 14

Es.

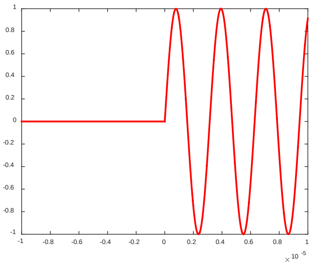


$$f(t) = \sin(\omega_o t)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega_o t) e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega_o t}}{2j} e^{-j\omega t}\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\omega_o t}}{2j} e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{\pi\delta(\omega-\omega_o)}{2j} - \frac{\pi\delta(\omega+\omega_o)}{2j}$$

Ma:



$$f(t) = \sin(\omega_o t) 1(t) = \frac{e^{j\omega_o t}}{j2} 1(t) - \frac{e^{-j\omega_o t}}{j2} 1(t)$$

Equivalente alla traslazione nel dominio delle f:

(Detta $1(\omega)$ la trasformata di $1(t)$)

$$f(t) \rightarrow \frac{1}{j2} 1(\omega-\omega_o) - \frac{1}{j2} 1(\omega+\omega_o) = \frac{1}{j2}\left[\pi\delta(\omega-\omega_o) + \frac{1}{j(\omega-\omega_o)}\right] -$$

$$-\frac{1}{j2}\left[\pi\delta(\omega+\omega_o) + \frac{1}{j(\omega+\omega_o)}\right] = \frac{\pi}{j2}[\delta(\omega-\omega_o) - \delta(\omega+\omega_o)] +$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\omega+\omega_o} - \frac{1}{\omega-\omega_o}\right\} = \frac{\pi}{j2}[\delta(\omega-\omega_o) - \delta(\omega+\omega_o)] + \frac{\omega_o}{\omega_0^2-\omega^2}$$

Se: $$f(t) = \sin(\omega_o t)\{1(t+a) - 1(t-a)\}$$

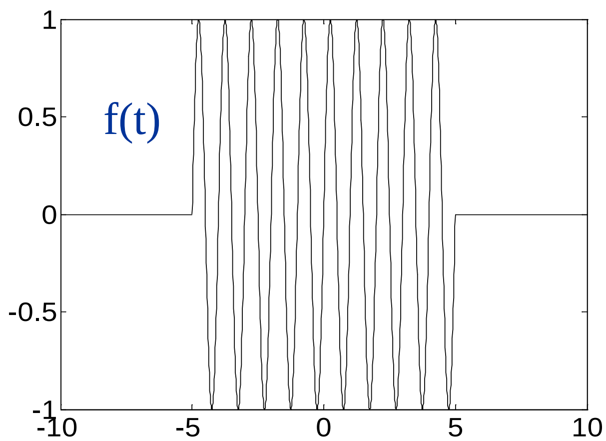
Succede che:

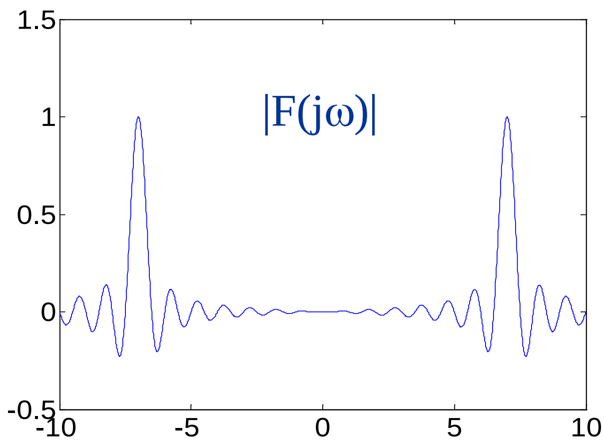
$$f(t) \rightarrow \int_{-a}^{a} \sin(\omega_o t) e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-a}^{a} \left(\frac{e^{j\omega_o t} - e^{-j\omega_o t}}{j2}\right) e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{j2}\left[\frac{e^{-j(\omega-\omega_o)t}}{-j(\omega-\omega_o)}\right]_{-a}^{a} - \frac{1}{j2}\left[\frac{e^{-j(\omega+\omega_o)t}}{-j(\omega+\omega_o)}\right]_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{1}{j2}\left\{\left[\frac{2\sin[(\omega-\omega_o)a]}{(\omega-\omega_o)}\right] - \left[\frac{2\sin[(\omega+\omega_o)a]}{(\omega+\omega_o)}\right]\right\}$$

Vale a dire che la funzione seno si 'sparpaglia' quando viene limitata.





Es.:

Valutiamo la trasformata di Fourrier del segnale Gaussiano:

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad \Longleftrightarrow \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-st}dt$$

Innanzi tutto osserviamo che f(t) è una funzione pari. Per le proprietà viste sulla trasformata di Fourrier deve essere verificato che F(s) $\in \Re$.

vediamo di semplificare:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t^2+2\sigma^2 st+\sigma^4 s^2-\sigma^4 s^2)}dt = e^{-\frac{\sigma^2}{2}\omega^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t+\sigma^2 s)^2}dt$$

Ora applichiamo la proprietà che F(s) $\in \Re$. Deve anche $\in \Re$ la funzione:

$$G(s) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}\omega^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t+\sigma^2 s)^2}dt$$

A questo punto basta porre u=t + σ^2s, ovvero du=dt:

$$G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}u^2}du = \sigma\sqrt{2\pi}$$

In definitiva:

$$F(s) = \sigma\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\sigma^2}{2}\omega^2}$$

La proprietà della funzione Gaussiana rimane inalterata nel passaggio al dominio delle frequenze: la forma della funzione non cambia.

Al sola particolarità è che essendo un cambiamento della variabile t nella variabile $\omega=1/(2\pi t)$, il coefficiente moltiplicativo di t nell'esponenziale diviene il reciproco nel dominio delle frequenze.

Questo indica che la funzione gaussiana è così regolare che lo spettro delle sue componenti in frequenza sono distribuite con la stessa modalità del segnale temprale nel dominio del tempo.

Sebbene le funzioni che si riescano a studiare con Fourier siano molte resta comunque limitato il campo delle funzioni per cui esista la trasformata. Un modo che si usa per ovviare a questo inconveniente è quello di limitare la funzione nel tempo, cosa che si fa nei sistemi di acquisizione.

Un altro metodo è quello di ‘filtrare’ la funzione in considerazione in modo da lasciare inalterata la parte di interesse.

Sicuramente l’insieme delle funzioni analizzabili cresce enormemente se, ad esempio, per una funzione nulla per t<0 consideriamo la nuova funzione:

$f(t)e^{-\alpha t}$ dove α sia opportuno.

Es. $f(t)=x^n 1(t)$ → $x^n e^{-\alpha t}$ risulta assolutamente integrabile per qualsiasi $\alpha>0$.

Possiamo considerare la trasformata di Fourier di $x^n e^{-\alpha t}$

$$f(t)e^{-\alpha t} \rightarrow \int_0^\infty f(t)e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-j(\omega+\alpha)t}\,dt = F(\alpha+j\omega) = F(s)$$

$$s = \alpha + j\omega$$

→ F(s) è detta trasformata di LAPLACE di f(t)

Infatti:

$$f(t)e^{-\alpha t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha+j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \overset{s=\alpha+j\omega}{=} \frac{1}{j2\pi}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(s)e^{st}e^{-\alpha t}\,ds$$

→ $$f(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\alpha-\infty}^{\alpha+\infty} F(s)e^{st}\,ds$$ L’integrale non dipende da α.

………. trasformata di Laplace, 2

Per essere più rigorosi:

Data una f(t) genericamente continua in $(0,+\infty)$ si dice trasformata di LAPLACE F(p) della variabile complessa $p=\alpha+j\omega$ la funzione per la quale sia possibile trovare un valore α_C di α per cui esiste:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

La quantità α_C è detta 'ascissa di convergenza' ed è il minimo valore di α per cui l'integrale esista.

Sotto tali condizioni vale la relazione inversa:

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha-j\infty} F(p)e^{pt}dp \quad \alpha > \alpha_C$$

$$0 \ \ \text{per} \ \ t < 0$$

L'integrale non dipende dalla scelta di α, purché $> \alpha_C$

Fortunatamente la grande parte delle proprietà godute dalla Trasformata di Fourier restano valide anche per la Trasformata di LAPLACE, con anche meno restrizioni.

La traslazione temporale rimane valida:

$$f(t-T)1(t-T) \rightarrow e^{-pT}F(p) \quad e \quad f(t)1(t)e^{ct} \rightarrow F(p-c)$$

Il teorema di derivazione:

$$\frac{df}{dt} \rightarrow pF(p) - f(0^{+}) \qquad \text{ma:} \qquad \frac{d\big(f(t)1(t)\big)}{dt} \rightarrow pF(p)$$

E così pure per le derivate di ordine superiore.

Il teorema dell'integrale:

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \rightarrow \frac{1}{p}F(p)$$

Quindi il fatto di filtrare a bassa frequenza della TL elimina la condizione iniziale, cioè la δ(p). Ovviamente se la condizione iniziale è importante per l'evoluzione del segnale va tenuta in conto in altro modo, cosa che viene effettivamente fatta.

Il teorema di convoluzione resta valido pur di limitare a t il limite superiore dell'∫:

$$f(t) * h(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \rightarrow F(p)H(p)$$

Interessante:

$$f(t) * h(t) \rightarrow F(p)H(p) = H(p)F(p) \rightarrow h(t) * f(t)$$

Inoltre abbiamo il teorema dei limiti:

Caso 1

Caso 2

$$\begin{cases} f(0^+) = \lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{p\to\infty} pF(p) \\ f(+\infty) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{p\to 0} pF(p) \text{ se } \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} dt \text{ esiste} \end{cases}$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \overset{\text{per parti}}{=} -f(t)\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt}dt$$

$$= \frac{1}{p} f(0^+) + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt}dt$$

Quindi:

Caso 1 $$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0^+) + \lim_{p\to\infty}\int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt}dt = f(0^+)$$

Caso 2 $$\lim_{p\to 0} pF(p) = f(0^+) + \lim_{p\to 0}\int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt}dt = f(0^+) + \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} dt =$$

$$\overset{\text{se l'integgrale esiste}}{=} f(0^+) + f(+\infty) - f(0^+) = f(+\infty)$$

Estendiamo il teo della derivata:

Vale che: $$\frac{d^n\left(f(t)1(t)\right)}{dt^n} \rightarrow p^n F(p)$$ ma anche che:

$$\frac{d^n F(p)}{dp^n} \rightarrow (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-pt} dt$$

Di conseguenza:

$$t^n f(t) 1(t) \rightarrow (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$$

Per ottenere questa proprietà importante per la soluzione delle nostre reti elettriche:

$$f(t) = e^{-t/\tau} 1(t), \qquad \tau > 0 \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-(p+1/\tau)t} dt \Rightarrow F(p) = \frac{1}{p + 1/\tau}$$

$$t e^{-t/\tau} 1(t) \rightarrow (-1)^1 \frac{-1}{(p + 1/\tau)^2}$$

$$t^2 e^{-t/\tau} 1(t) \rightarrow (-1)^2 \frac{2}{(p + 1/\tau)^3}$$

$$t^3 e^{-t/\tau} 1(t) \rightarrow (-1)^3 \frac{-6}{(p + 1/\tau)^4}$$

…

$$t^n e^{-t/\tau} 1(t) \rightarrow (-1)^n \frac{(-1)^n n!}{(p + 1/\tau)^{n+1}}$$

$$t^n e^{-t/\tau} 1(t) \rightarrow \frac{n!}{(p + 1/\tau)^{n+1}}$$

Ora non ci resta che mettere in pratica quello che abbiamo appena visto:

Impedenza complessa di un condensatore:

$$V(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt' \quad \Rightarrow \quad V(s) = \frac{1}{sC} i(s)$$

Per questa ragione nel dominio delle frequenze si definisce per il condensatore l'impedenza complessa:

$$Z = \frac{1}{sC}$$

Impedenza complessa di un induttore:

$$V(t) = L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad V(s) = sLi(s)$$

Per questa ragione nel dominio delle frequenze si definisce per l'induttore l'impedenza complessa:

$$Z = sL$$

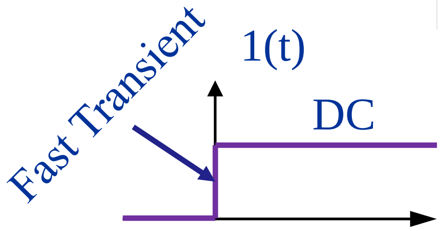
Siccome i circuiti elettronici ed i modelli dei componenti elettronici sono basati sull'impiego di Resistenze, Condensatori ed Induttanze, le soluzioni delle reti di nostro interesse coinvolgono derivate ed integrali.

Operando nel dominio delle frequenze queste equazioni differenziali vengono tutte trasformate in equazioni algebriche che forniscono come risultato rapporto tra polinomi, per i quali possiamo riscostruire facilmente l'evoluzione temporale nel dominio del tempo, o interpretare nel dominio delle frequenze.

Chiaramente, almeno in laboratorio, tutto si governa bene a meno di usare segnali di test di forma «esotica»…

Gradino:

$$f_1(t) = 1(t) \;\; \text{ed anche} \;\; f_2(t) = 1(t-T)$$



$$F_1(p) = \int_0^{+\infty} 1(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{e^{-pt}}{-p}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}, \quad \alpha_c > 0$$

$$F_2(p) = e^{-pT}F_1(p) = \frac{e^{-pT}}{p}$$

Quindi:

$$f_3(t) = 1(t-T_1) - 1(t-T_2)$$

fornisce:

$$F_3(p) = \frac{1}{p}\left(e^{-pT_1} - e^{-pT_2}\right)$$

In particolare:

$$f_4(t) = at1(t) \quad \text{è} \quad l'\int \quad \text{di} \quad a1(t)$$

quindi:

$$F_4(p) = \frac{1}{p}\text{Tras}(a1(t)) = \frac{1}{p}\,\frac{a}{p} = \frac{a}{p^2}$$

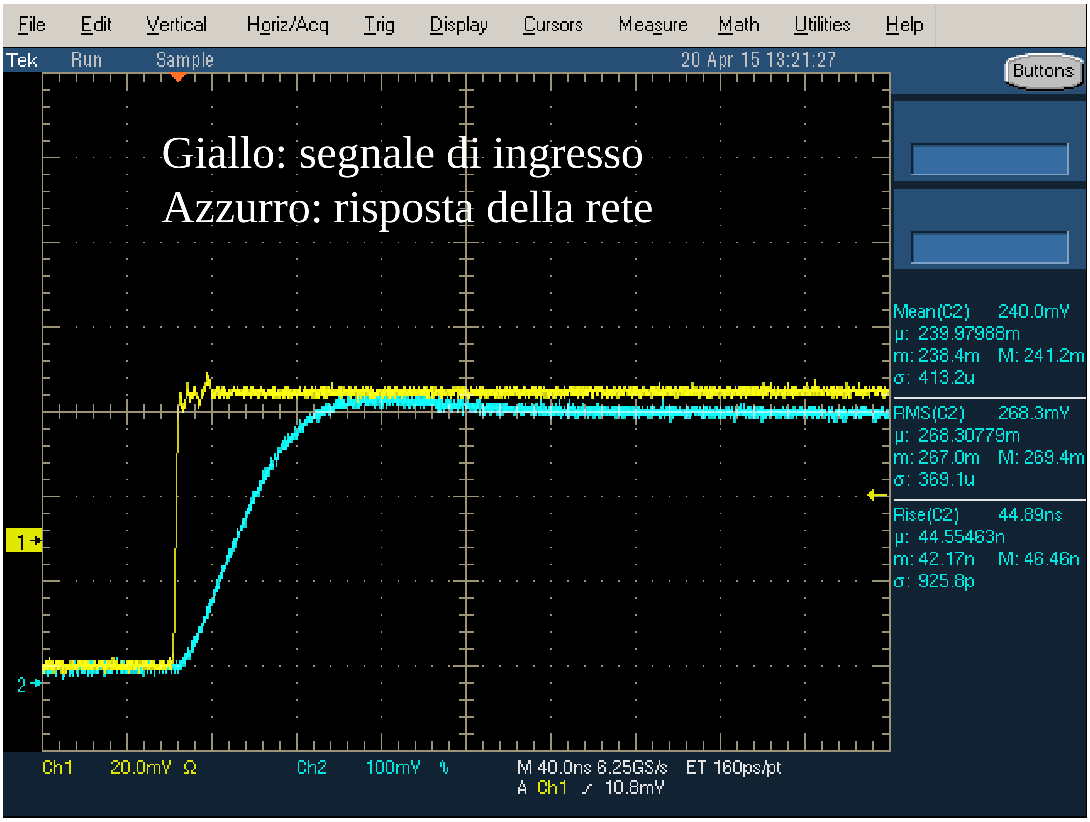
L’importanza della funzione a gradino in laboratorio

$$f_1(t) = 1(t) \quad \leftrightarrow \quad F(p) = \frac{1}{p}$$

Avendo una transizione repentina la 1(t) presenta uno spettro di frequenza esteso ed è una buona funzione di test per caratterizzare a colpo d’occhio la risposta di una rete.

Chiaramente la funzione a gradino ideale non è sintetizzabile, ma sono sintetizzabili funzioni a gradino con transizioni molto veloci. La strumentazione capace di implementare queste funzioni ha un costo che è, ovviamente, inversamente proporzionale al tempo di transizione.

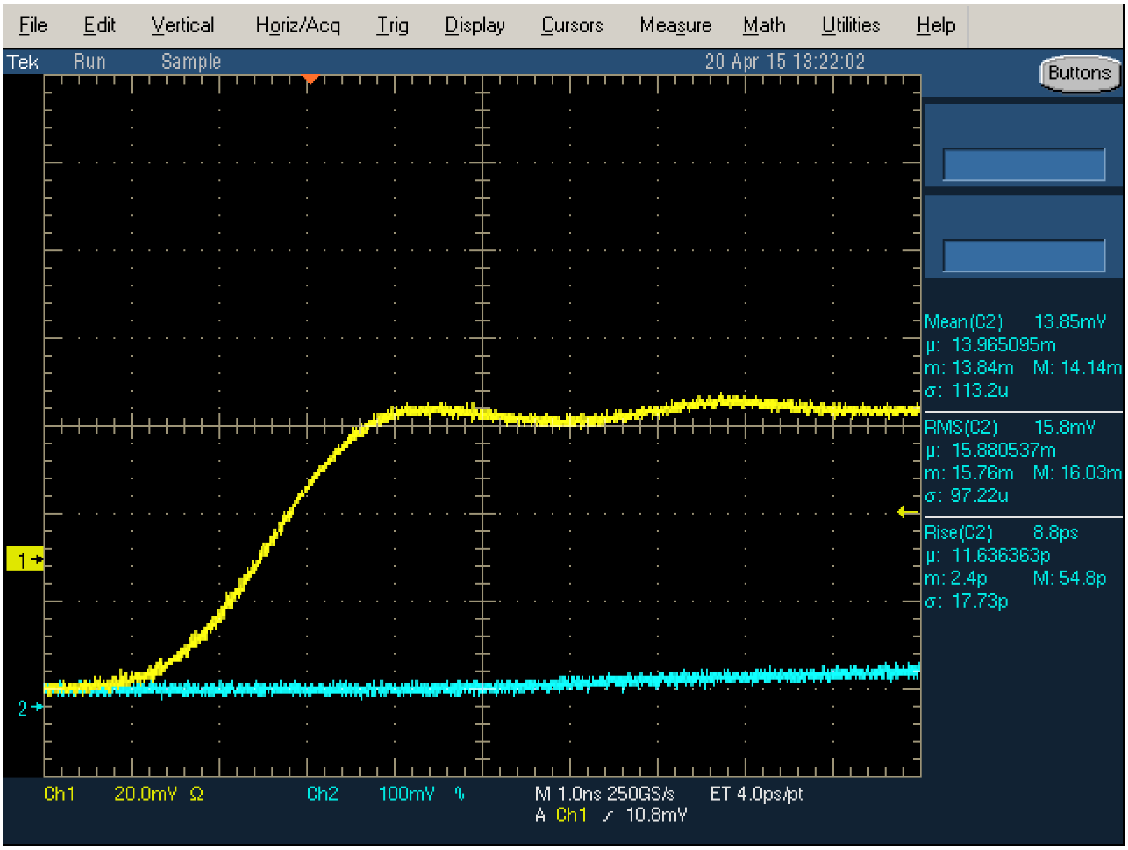
Qui possiamo vedere una situazione reale dove il tempo di transizione della funzione eccitante è molto più corto della risposta della rete. Per la rete la transizione della funzione di ingresso è quindi approssimabile ad una 1(t).



Vedremo tra qualche pagina come potere descrivere le caratteristiche della risposta alla δ(t) della rete in funzione della risposta al gradino.

Scalando a tempi via via più piccoli si riesce ad arrivare a verificare il tempo di transizione effettivo del gradino di ingresso alla rete.

Come si può vedere quando il gradino di ingresso ha completato la transizione il segnale di risposta della rete non ha praticamente ancora iniziato a muoversi.



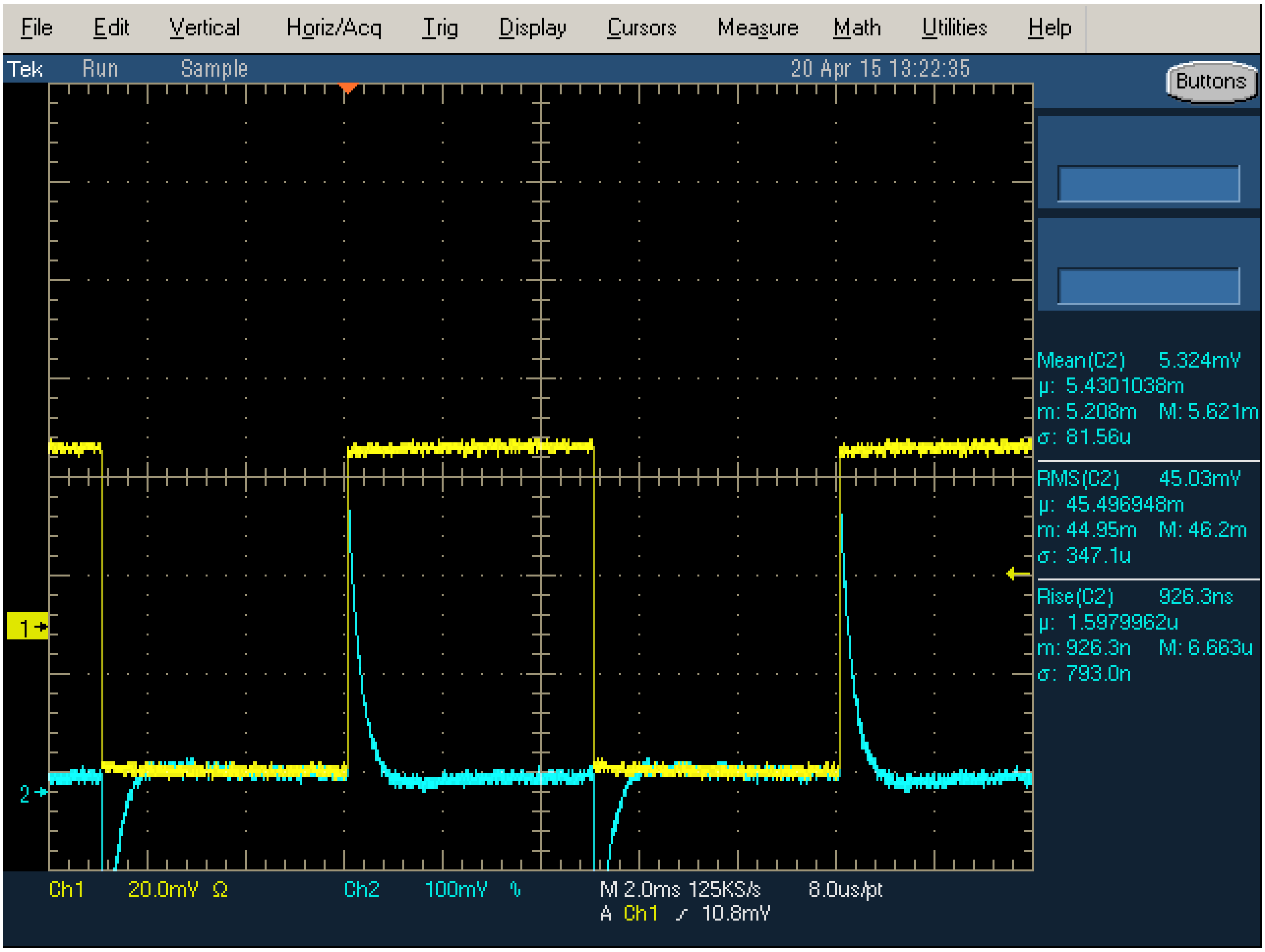
Questo mostra come il gradino di ingresso non contribuisce alla velocità di transizione del gradino di uscita.

Infine un commento sulla ripetitività del segnale.

In genere non si applica un segnale di ingresso che abbia una effettiva durata infinita, ma bensì un’onda quadra con un periodo di ripetizione che sia sufficientemente grande rispetto all’evoluzione del segnale.

Questo rende agevole il compito dell’oscilloscopio, lo strumento da cui è stata tratta l’immagine, all’acquisizione dell’onda.

Inoltre la presenza di possibili disturbi esterni possono essere meglio messi in evidenza.



Tuttavia con gli oscilloscopi di ultima generazione l’uso dell’onda quadra potrebbe essere in effetti sostituita dal gradino ideale.

Da: $f_S(t) = \sin(\omega_o t)1(t)$

Otteniamo:

$$F_s(p) = \int_0^{+\infty} \sin(\omega_o t)1(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{j\omega_o t}e^{-pt}}{j2}dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-j\omega_o t}e^{-pt}}{j2}dt =$$

$$= \frac{1}{j2}\left[-\frac{e^{-(p-j\omega_o)t}}{p-j\omega_o} + \frac{e^{-(p+j\omega_o)t}}{p+j\omega_o}\right]_0^{+\infty} = \qquad \alpha_C > 0$$

$$= \frac{1}{j2}\left[\frac{1}{p-j\omega_o} - \frac{1}{p+j\omega_o}\right] = \frac{1}{j2}\left[\frac{p+j\omega_o-(p-j\omega_o)}{p^2+\omega_o^2}\right] = \frac{\omega_o}{p^2+\omega_o^2}$$

In particolare:

$f_c(t) = \cos(\omega_o t)1(t)$ lo deriviamo da:

$$\frac{d\big(\sin(\omega_o t)1(t)\big)}{dt} = \omega_o\cos(\omega_o t)1(t) + \sin(0)\delta(t) \Rightarrow$$

$$\cos(\omega_o t)1(t) = \frac{1}{\omega_o}\frac{d\big(\sin(\omega_o t)1(t)\big)}{dt}$$

E quindi:

$$F_c(p) = \frac{1}{\omega_o}pF_s(p) = \frac{p}{p^2+\omega_o^2}$$

NB: Le proprietà che vedremo d'ora in poi sono fondamentali nello studio del comportamento degli amplificatori reazionati.

Riassumendo:

$$(\tau > 0) \quad e^{-t/\tau}1(t) \leftrightarrow \frac{1}{p+1/\tau} \quad \text{polo a:} -\frac{1}{\tau} < 0 \;\; \text{Negativo, reale}$$

$$(\tau > 0) \quad e^{t/\tau}1(t) \leftrightarrow \frac{1}{p-1/\tau} \text{polo a:} \frac{1}{\tau} > 0 \;\; \text{polo positivo, divergenza}$$

$$\cos(\omega_o t)1(t) \leftrightarrow \frac{p}{p^2+\omega_o^2} = \frac{p}{(p+j\omega_o)(p-j\omega_o)}$$

2 poli complessi puri a: $\pm j\omega$. La risposta prosegue all'infinito se non ci sono termini dissipativi.

Ora consideriamo: $f(t) = \cos(\omega_o t)e^{-\gamma t}1(t), \;\; \gamma > 0:$

(risposta oscillatoria smorzata)

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \cos(\omega_o t)\, e^{-\gamma t}\, e^{-pt} dt =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(j\omega_o-\gamma)t}e^{-pt}}{2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-j\omega_o-\gamma)t}e^{-pt}}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{e^{(j\omega_o-\gamma)t}e^{-pt}}{p+\gamma-j\omega_o} - \frac{e^{(j\omega_o+\gamma)t}e^{-pt}}{p+\gamma+j\omega_o}\right\}_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{p+\gamma-j\omega_o} + \frac{1}{p+\gamma+j\omega_o}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{p+\bar{p}_o} + \frac{1}{p+p_o}\right\} = \frac{1}{2}\,\frac{p+\gamma+j\omega_o+p+\gamma-j\omega_o}{p^2+2\mathrm{Re}(p_0)p+|p_0|^2} =$$

$$= \frac{p+\gamma}{p^2+2\mathrm{Re}(p_0)p+|p_0|^2}:$$

poli a: $\pm j\omega_o$-γ. I poli sono complessi e coniugati con parte reale negativa.

Quindi: $f(t) = \cos(\omega_o t)e^{-\gamma t}1(t)$ dà luogo a 2 poli complessi coniugati:

$$p_1 = -\gamma + j\omega_o = p_o \quad e \quad p_2 = \overline{p_1} = \overline{p_o}$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{p+\gamma-j\omega_o} + \frac{1}{p+\gamma+j\omega_o}\right\} = \frac{p+\gamma}{p^2 + 2\mathrm{Re}(p_0)p + |p_0|^2}$$

La parte complessa è responsabile della condizione oscillatoria, mentre la parte reale del termine esponenziale. Se il termine esponenziale è negativo la funzione è limitata all'infinito, in caso contrario diverge.

È usuale interpretare l'effetto della parte oscillatoria rispetto a quella esponenziale in termini del rapporto tra parte reale del polo ed il suo modulo:

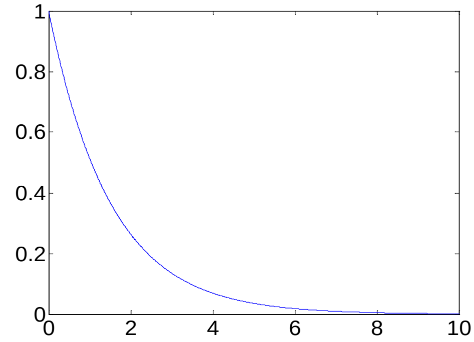
$$\frac{\mathrm{Re}(p_o)}{|p_0|}$$

Se il rapporto è unitario abbiamo solo parte esponenziale, se è nullo abbiamo esclusivamente la parte oscillatoria.

Riassumendo di nuovo:

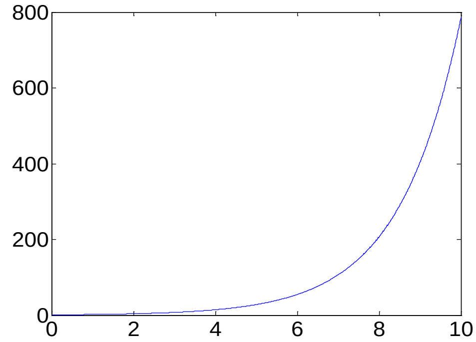
Polo negativo:

$$(\tau > 0)\ \ e^{-t/\tau}\,1(t) \leftrightarrow \frac{1}{p+1/\tau}\ \ p_0 = -\frac{1}{\tau}$$



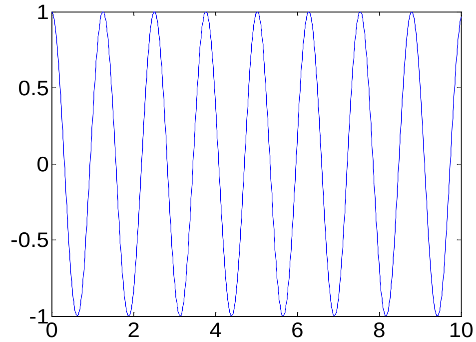
Polo positivo:

$$(\rho < 0)\ \ e^{-t/\rho}\,1(t) \leftrightarrow \frac{1}{p+1/\rho}\ \ p_0 = -\frac{1}{\rho}$$

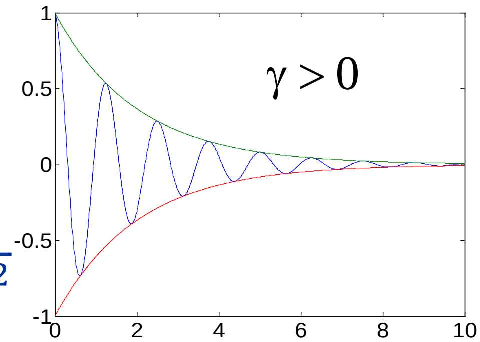


Poli immaginari puri:

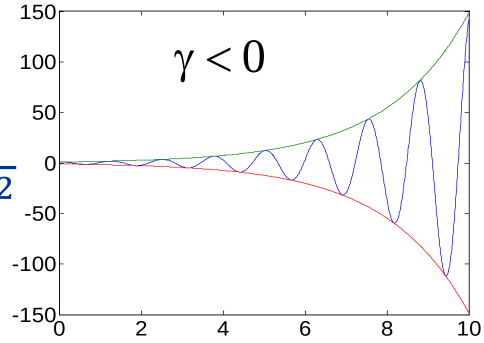
$$\cos(\omega_o t) \leftrightarrow \frac{p}{p^2+\omega_o^2} = \frac{p}{(p+j\omega_o)(p-j\omega_o)}$$



Poli complessi coniugati:



$$f(t) = \cos(\omega_o t)e^{-\gamma t}1(t) \leftrightarrow \frac{p+\gamma}{p^2+2\mathrm{Re}(p_0)p+|p_0|^2}$$



$$f(t) = \sin(\omega_o t)e^{-\gamma t}1(t) \leftrightarrow \frac{\omega_o}{p^2+2\mathrm{Re}(p_0)p+|p_0|^2}$$

$$p_1 = -\gamma + j\omega_o = p_o$$
$$p_2 = \overline{p_1} = \overline{p_o}$$

Abbiamo visto che sappiamo convertire facilmente la funzione di trasferimento o il segnale presente all'uscita della rete se è composta di poli semplici reali o complessi coniugati. Anche nel caso i poli siano multipli siamo in grado di svolgere la conversione.

Per potere ricondurci a questa situazione dobbiamo quindi potere riformulare la funzione di trasferimento o il segnale presente all'uscita della rete ad una somma di termini elementari.
Sappiamo che la funzione che otterremo sarà un rapporto tra polinomi.
Nel caso reale si ottiene poi quasi esclusivamente che il grado del numeratore è minore o uguale a quello del denominatore.

Il nostro obiettivo è perciò quello di arrivare a:

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{(p-p_n)^{\gamma}} \quad \text{con} \ \ \mathrm{Grado}(N) < \mathrm{Grado}(D)$$

I caso) I poli siano tutti semplici, reali o complessi coniugati.

$$(p-p_1)\frac{N(p)}{D(p)} = A_1 + \frac{A_2}{p-p_2}(p-p_1) + \ldots\ldots + \frac{A_n}{\left(p-p_n\right)^{\gamma}}\left(p-p_1\right)$$

Per cui:

$$A_1 = \lim_{p \to p_1} (p-p_1)\frac{N(p)}{D(p)}$$

In genere:

$$A_i = \lim_{p \to p_i} (p-p_i)\frac{N(p)}{D(p)}$$

II Caso) Presenza di poli multipli:

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_k)(p-p_m)^{\gamma}}, \qquad \gamma + k = \mathrm{Grado}(D)$$

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \cdots \frac{A_k}{p-p_k} + \\ + \frac{B_1}{(p-p_m)^1} + \frac{B_2}{(p-p_m)^2} + \cdots + \frac{B_{\gamma}}{(p-p_m)^{\gamma}}$$

Quindi:

$$(p-p_m)^{\gamma}\frac{N(p)}{D(p)} = \left[\frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \cdots \frac{A_k}{p-p_k}\right](p-p_m)^{\gamma} + \\ + \left[\frac{B_1}{(p-p_m)^1} + \frac{B_2}{(p-p_m)^2} + \cdots\right](p-p_m)^{\gamma} + B_{\gamma}$$

Ovvero:

$$B_{\gamma} = \lim_{p\to p_m}(p-p_m)^{\gamma}\frac{N(p)}{D(p)}$$

Ma:

$$(p-p_m)^{\gamma}\frac{N(p)}{D(p)} = \left[\frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \cdots \frac{A_k}{p-p_k}\right](p-p_m)^{\gamma} + \\ + B_1(p-p_m)^{\gamma-1} + B_2(p-p_m)^{\gamma-2} + \cdots \\ + B_{\gamma-1}(p-p_m) + B_{\gamma}$$

Deriviamo:

$$\frac{d}{dp}\left[(p-p_m)^{\gamma}\frac{N(p)}{D(p)}\right]=\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{A_i}{p-p_i}\right]\gamma(p-p_m)^{\gamma-1}$$

$$+(p-p_m)^{\gamma}\frac{d}{dp}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{A_i}{p-p_i}\right]$$

$$+(\gamma-1)B_1(p-p_m)^{\gamma-2}+(\gamma-2)B_2(p-p_m)^{\gamma-3}+\cdots$$

$$+B_{\gamma-1}$$

Quindi:

$$B_{\gamma-1}=\lim_{p\to p_m}\frac{d}{dp}\left[(p-p_m)^{\gamma}\frac{N(p)}{D(p)}\right]$$

Ovvero, per induzione:

$$B_k==\lim_{p\to p_m}\frac{1}{(\gamma-k)!}\,\frac{d^{(\gamma-k)}}{dp^{(\gamma-k)}}\left[(p-p_m)^{\gamma}\frac{N(p)}{D(p)}\right]$$

Ricordiamo che: i poli,e zeri,possono essere complessi. Essendo i poli e zeri radici di equazioni polinomiali a coefficienti reali, non possono che essere complessi e coniugati.

Non solo, mai coefficienti delle razionalizzazioni che si ottengono con il teorema dei residui devono essere anche loro complessi e coniugati.

Richiamo sui poli multipli reali e cc

Per un polo multiplo reale vale la regola già vista:

$$t^n e^{-t/\tau} 1(t) \leftrightarrow \frac{n!}{(p+1/\tau)^{n+1}}$$

Per un polo multiplo complesso coniugato si ripete sostanzialmente lo stesso procedimento. Per esso avremo che:

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \cdots + \frac{B_1}{(p-p_c)^1} + \frac{B_2}{(p-p_c)^2} + \cdots + \frac{B_\gamma}{(p-p_c)^\gamma} + \cdots + \\ + \frac{\overline{B}_1}{(p-\overline{p}_c)^1} + \frac{\overline{B}_2}{(p-\overline{p}_c)^2} + \cdots + \frac{\overline{B}_\gamma}{(p-\overline{p}_c)^\gamma} + \cdots$$

Consideriamo il k-esimo elemento:

$$\frac{B_k}{(p-p_c)^k} + \frac{\overline{B}_k}{(p-\overline{p}_c)^k}$$

Ma:

$$\frac{B_k}{(p-p_c)^k} \leftrightarrow \frac{B_k}{(k-1)\,!} t^{k-1} e^{p_c t} \qquad \frac{\overline{B_k}}{(p-\overline{p_c})^k} \leftrightarrow \frac{\overline{B_k}}{(k-1)\,!} t^{k-1}\, e^{\overline{p_c} t}$$

Posto: $\quad p_c = \alpha + j\beta$

$$\frac{B_k}{(p-p_c)^k} + \frac{\overline{B_k}}{(p-\overline{p_c})^k} \leftrightarrow |B_k| e^{j\Theta_B} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\alpha t} e^{j\beta t}$$

$$+|B_k| e^{-j\Theta_B} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\alpha t}\, e^{-j\beta t} =$$

$$= |B_k| e^{\alpha t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \left[e^{j(\beta t+\Theta_B)} + e^{-j[\beta t+\Theta_B]} \right] \frac{2}{2} =$$

$$= 2|B_k| e^{\alpha t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \cos(\beta t + \Theta_B)$$

Considerazioni:

Per potere trasformare il rapporto nella forma:

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{(p-p_n)^k} \quad \text{con Grado}(N) < \text{Grado}(D)$$

(Questa rappresentazione prevede che valga che: Grado(N)≤Grado(D)-1)

Nel caso Grado(N) < Grado(D):

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1}p^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \cdots + b_0}$$

$$= \frac{a_m}{b_n}\,\frac{p^m + (a_{m-1}/a_m)p^{m-1} + \cdots + (a_0/a_m)}{p^n + (b_{n-1}/b_n)p^{n-1} + \cdots + (b_0/b_n)} =$$

$$= \frac{a_m}{b_n}\,\frac{(p-z_m)(p-z_{m-1})\cdots(p-z_1)}{(p-p_n)(p-p_{n-1})\cdots(p-p_1)}$$

Inoltre se Grado(N)=Grado(D) bisogna isolare in qualche modo un termine in p al numeratore:

Caso 1)

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{pN_R(p)}{(p-p_n)(p-p_{n-1})\cdots(p-p_1)} =$$

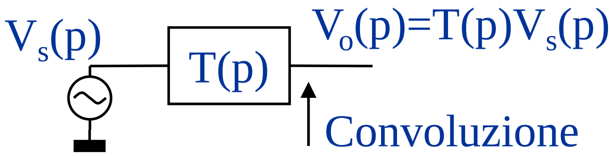
$$= p\,\frac{N_R(p)}{(p-p_n)(p-p_{n-1})\cdots(p-p_1)} \quad \text{con Gra.}(N_R) < \text{Gra.}(D)$$

Caso 2)

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{(p-z_n)N_R(p)}{(p-p_n)(p-p_{n-1})\cdots(p-p_1)} =$$

$$= (p-z_n)\,\frac{N_R(p)}{(p-p_n)(p-p_{n-1})\cdots(p-p_1)} \quad \text{con Gra.}(N_R) < \text{Gra.}(D)$$

Regime sinusoidale



E sia: $V_s(t)=V_{io}\sin(\omega_o t)1(t)$

$$V_o(p) = T(p)V_s(p) = \frac{N(p)}{D(p)}\text{Tras.}\left(\sin(\omega_o t)V_{io}\right) = \frac{N(p)}{D(p)}\,\frac{V_{io}\omega_o}{p^2+\omega_o^2}$$

Consideriamo il caso in cui T(p) mostri una risposta finita alla $\delta(t)$, ovvero che non presenti poli con parte Reale >0 e, possibilmente, non abbia poli puramente immaginari.

$$V_o(p) = T(p)\frac{V_{io}\omega_o}{(p+j\omega_o)(p-j\omega_o)} =$$

$$= \frac{a_m}{b_n}\,\frac{(p-z_m)(p-z_{m-1})\cdots(p-z_1)}{(p-p_n)(p-p_{n-1})\cdots(p-p_1)}\,\frac{V_{io}\omega_o}{(p+j\omega_o)(p-j\omega_o)}$$

$$= \frac{A_1}{p-p_1}+\frac{A_2}{p-p_2}+\ldots\ldots+\frac{A_n}{(p-p_n)^\gamma}+\cdots+\frac{A}{(p-j\omega_o)}\ +\frac{\bar{A}}{(p+j\omega_o)} =$$

$$= \begin{bmatrix}\text{Termini t. c. la} \\ \text{rispsta } \rightarrow 0 \\ \text{per t} \rightarrow\ \infty\end{bmatrix} + \left[\frac{A}{(p-j\omega_o)}\ +\frac{\bar{A}}{(p+j\omega_o)}\ \right]$$

L'ultima uguaglianza vale se non ci sono poli puramente immaginari e non ci sono poli con parte reale positiva in T(p). Per queste situazioni si veda più avanti.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MILANO BICOCCA

$$V_o(p) = T(p)\frac{V_{io}\omega_o}{(p+j\omega_o)(p-j\omega_o)} = \begin{bmatrix} \text{Termini t. c. la} \\ \text{rispsta } \to 0 \\ \text{per t} \to \ \infty \end{bmatrix} + \left[\frac{A}{(p-j\omega_o)} + \frac{\overline{A}}{(p+j\omega_o)}\right]$$

I coefficienti dei 2 poli immaginari puri li ricaviamo da:

$$\text{Dove: } A = \lim_{p\to j\omega_o} \frac{V_{io}T(p)\omega_o}{(p+j\omega_o)} = \frac{V_{io}T(j\omega_o)}{2j}$$

$$\overline{A} = \lim_{p\to -j\omega_o} \frac{V_{io}T(p)\omega_o}{(p-j\omega_o)} = \frac{V_{io}T(-j\omega_o)}{-2j}$$

Quindi:

$$V_o(p) = \frac{V_{io}}{2j}\left[-\frac{T(-j\omega_o)}{(p+j\omega_o)} + \frac{T(j\omega_o)}{(p-j\omega_o)}\right]$$

Ovviamente ci aspettiamo che i 2 coefficienti siano CC, infatti:

$$T(\overline{p}) = \overline{T}(p) \text{ da cui segue che:}$$

$$T(-j\omega_o) = T^*(j\omega_o) e T^*(-j\omega_o) = T(j\omega_o)$$

$$T(j\omega_o) = |T(j\omega_o)|e^{j\varphi(T(j\omega_o))}$$

$$T(-j\omega_o) = T^*(j\omega_o) = |T(j\omega_o)|e^{-j\varphi(T(j\omega_o))}$$

$$V_o(p) = \frac{V_{io}}{2j}\left[-\frac{T(-j\omega_o)}{(p+j\omega_o)} + \frac{T(j\omega_o)}{(p-j\omega_o)}\right] =$$

$$= \frac{V_{io}}{2j}|T(-j\omega_o)|\left[-\frac{e^{-j\varphi(T(j\omega_o))}}{(p+j\omega_o)} + \frac{e^{j\varphi(T(j\omega_o))}}{(p-j\omega_o)}\right]$$

$$V_o(t) = V_{io}|T(j\omega_o)|\left[-\frac{e^{-j\varphi(T(j\omega_o))}e^{-j\omega_o t} - e^{j\varphi(T(j\omega_o))}e^{j\omega_o t}}{2j}\right]$$

$$V_o(t) = V_{io}|T(j\omega_o)|\sin\big(\omega_o t + \varphi(T(j\omega_o))\big)$$

Fatto fondamentale. Eccitando un sistema avente trasformata T(p) con un segnale sinusoidale puro, di frequenza ω_o, si ottiene come risposta un segnale sinusoidale avente la stessa frequenza, ma con uno sfasamento che dipende dalla fase di T(p), valutata a $j\omega_o$, ed ampiezza che diviene proporzionale al modulo di $T(j\omega)$.

Abbiamo ottenuto la ‘proiezione’ di T(p) sulla sinusoide alla frequenza ω_o.

In sostanza si possono desumere tutte le informazioni sui poli e sugli zeri.

Questa proprietà è importantissima perché consente di fare una ‘radiografia’ della funzione di trasferimento utilizzando il regime sinusoidale.

Regime sinusoidale se T(p) ha poli con parte reale > 0:

In questo caso la risposta alla sinusoide a regime divergerà comunque verso una delle tensioni di alimentazione dell'amplificatore.

Regime sinusoidale se T(p) ha una coppia di poli CC immaginari puri:

In questo caso T(p) possiamo esprimerla come:

$$T(p) = f(p) + \frac{B}{p + j\omega_p} + \frac{\overline{B}}{p - j\omega_p}$$

Quindi:

$$V_o(p) = \left\{ f(p) + \frac{B}{p + j\omega_p} + \frac{\overline{B}}{p - j\omega_p} \right\} \frac{V_{io}\,\omega_o}{(p - j\omega_o)\,(p + j\omega_o)}$$

Perciò la risposta globale sarà data da dei termini (contenuti in f(p)) che si annulleranno a regime e la sovrapposizione di 2 sinusoidi alle frequenze ω_p e ω_o.

RAPPRESENTAZIONE DI BODE

Supponiamo la T(p) espressa da poli e e zeri semplici, per iniziare:

$$T(p) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(p - z_i)\prod_{k=1}^{m}(p^2 - 2\mathrm{Re}(z_k)p + |z_k|^2)}{\prod_{i=1}^{r}(p - p_i)\prod_{k=1}^{q}(p^2 - 2\mathrm{Re}(p_k)p + |p_k|^2)}$$

Che può essere razionalizzata in:

$$T(p) = \\ = \frac{\prod_{i=1}^{n} z_i \prod_{k=1}^{m}|z_k|^2}{\prod_{i=1}^{r} p_i \prod_{k=1}^{q}|p_k|^2}\,\frac{\prod_{i=1}^{n}(p/z_i - 1)\prod_{k=1}^{m}(p^2/|z_k|^2 + 2\zeta_k/|z_k|\,p + 1)}{\prod_{i=1}^{r}(p/p_i - 1)\prod_{k=1}^{q}(p^2/|p_k|^2 + 2\chi_k/|p_k|\,p + 1)}$$

dove:
$$\begin{cases} \xi_k = -\dfrac{\mathrm{Re}(z_k)}{|z_k|} \\ \chi_k = -\dfrac{\mathrm{Re}(p_k)}{|p_k|} \end{cases}$$

Chiamiamo g il numero reale:
$$g = \frac{\prod_{i=1}^{n} z_i \prod_{k=1}^{m}|z_k|^2}{\prod_{i=1}^{r} p_i \prod_{k=1}^{q}|p_k|^2}$$

E’ utile e pratica la seguente rappresentazione, che parte dalla notazione:

$$T(j\omega) = |T(j\omega)|\, e^{j\arg(T(j\omega))}$$

Vale a dire di limitarsi a considerare T(p) solo sull’asse complesso, anche se si sta considerando la trasformata di Laplace e non di Fourier. Questa rappresentazione non è limitativa giacché la parte reale della frequenza complessa serve solo per annullare la funzione all’∞.

$$\begin{aligned}
20\log_{10}(|T(j\omega)|) = 20\log_{10}|g| &+ 20\sum_{i=1}^{n}\log_{10}|\,j\omega/z_i - 1| + \\
&+20\sum_{k=1}^{m}\log_{10}|\,1-\omega^2/|z_k|^2 + 2\xi_k/|z_k|\,j\omega| - \\
&-20\sum_{i=1}^{r}\log_{10}|\,j\omega/p_i - 1| - \\
&-20\sum_{k=1}^{q}\log_{10}|\,1-\omega^2/|p_k|^2 + 2\chi_k/|p_k|\,j\omega|
\end{aligned}$$

Ovvero:

$$\begin{aligned}
20\log_{10}(|T(j\omega)|) = 20\log_{10}|g| &+ 20\sum_{i=1}^{n}\log_{10}\sqrt{\omega^2/z_i^2+1} + \\
&+20\sum_{k=1}^{m}\log_{10}\sqrt{[1-\omega^2/|z_k|^2]^2 + [2\xi_k/|z_k|\,\omega]^2} - \\
&-20\sum_{i=1}^{r}\log_{10}\sqrt{\omega^2/p_i^2+1} - \\
&-20\sum_{k=1}^{q}\log_{10}\sqrt{[1-\omega^2/|p_k|^2]^2 + [2\chi_k/|p_k|\,\omega]^2}
\end{aligned}$$

Naturalmente l'informazione sul solo modulo non basta. La fase completa le conoscenze necessarie:

$$\Phi(T(j\omega)) = \arg(g) + \sum_{i=1}^{n} \arg(j\omega/z_i - 1) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \arg(1 - \omega^2/|z_k|^2 + 2\xi_k/|z_k|\, j\omega) -$$
$$- \sum_{i=1}^{r} \arg(j\omega/p_i - 1) -$$
$$- \sum_{k=1}^{q} \arg(1 - \omega^2/|p_k|^2 + 2\chi_k/|p_k|\, j\omega)$$

Ovvero:

$$\Phi(T(j\omega)) = \arg(g) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{arctg}(\omega/z_i) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \mathrm{arctg}(2\xi_k/|z_k|\, \omega/(1 - \omega^2/|z_k|^2)) -$$
$$+ \sum_{i=1}^{r} \mathrm{arctg}(\omega/p_i) -$$
$$- \sum_{k=1}^{q} \mathrm{arctg}(2\chi_k/|p_k|\, \omega/(1 - \omega^2/|p_k|^2))$$

(Attenzione: sia gli Z_i che i p_i hanno segno.)

Comportamento di una funzione in regime sinusoidale, ovvero quando si impone p=jω, avente un polo semplice reale, senza zeri:

$$F(p) = \frac{1}{p/p_i - 1} \qquad p_i < 0,\ \ p_i \in \Re$$

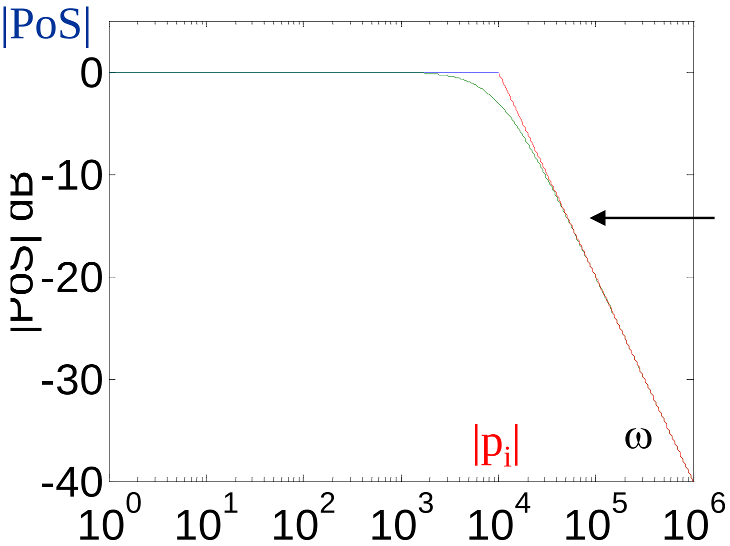
$$PoS = -20\log_{10}\sqrt{\omega^2/p_i^2 + 1} \qquad \Phi PoS = \mathrm{arctg}(\omega/p_i)$$

Punti importanti:

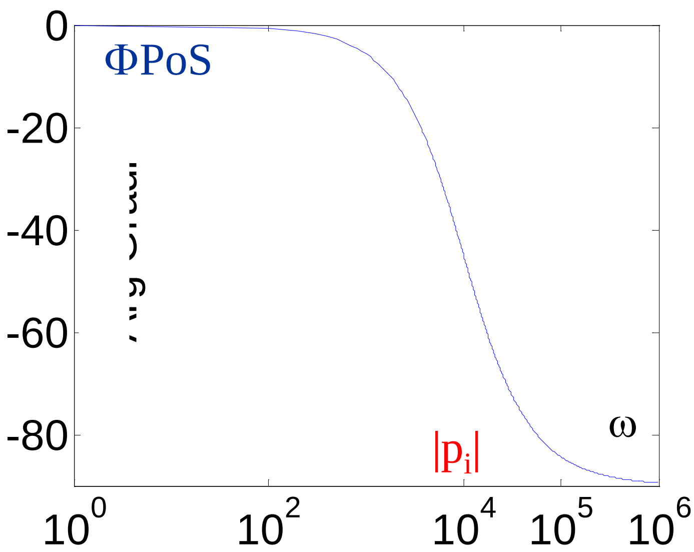
$$\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} PoS = 0 \text{ dB (o 1)} \\ \Phi PoS = 0 \end{cases}$$

$$\omega = p_i (< 0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} PoS = -3 \text{ dB (o 0.7 volte il valore originale)} \\ \Phi PoS = -45^o \text{ o } \pi/4 \end{cases}$$

$$\omega = \infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} PoS = -\infty \text{ dB} \\ \Phi PoS = -90^o \text{ o } \pi/2 \end{cases}$$



Pendenza:
20 db/dec



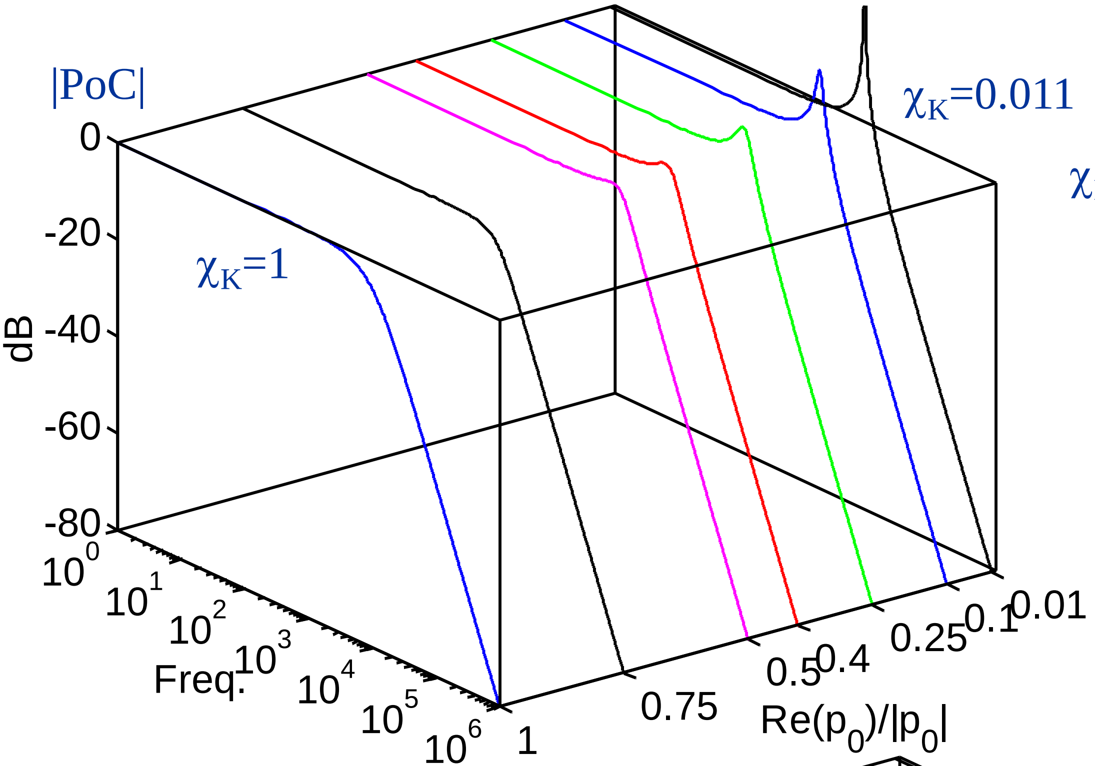
Comportamento di una funzione avente 2 poli CC semplici, senza zeri:

$$F(p) = \frac{1}{(p - p_o)(p - \bar{p}_o)}$$

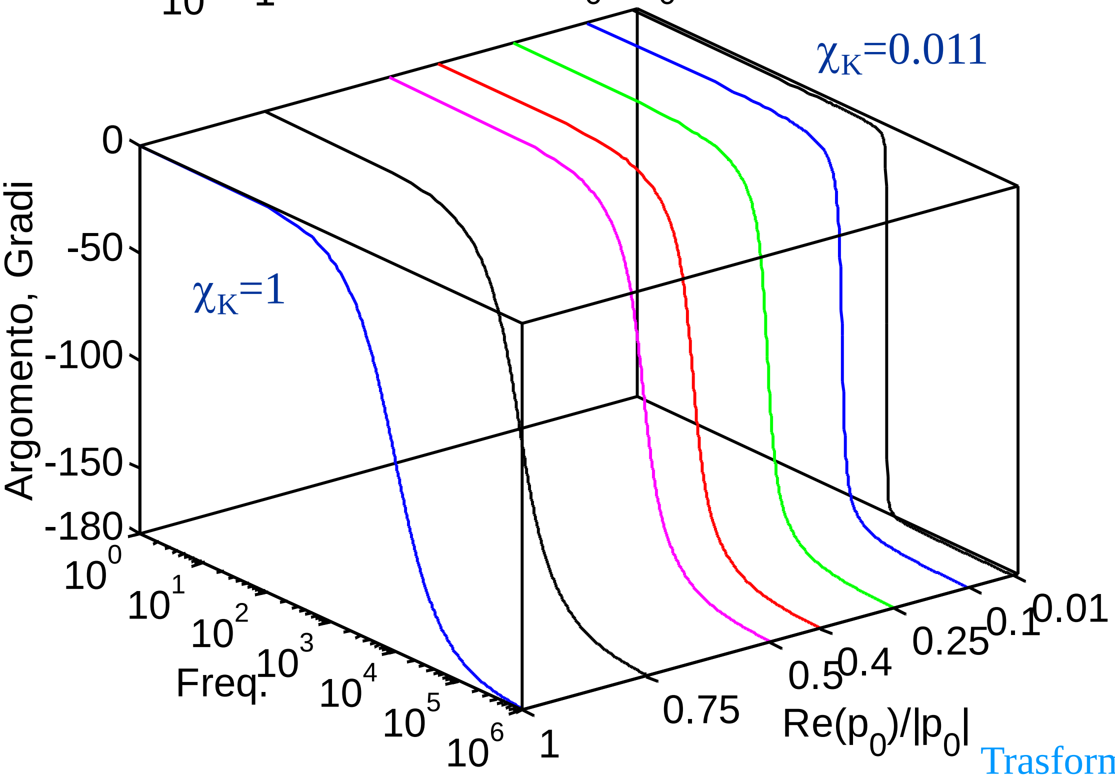
$$PoC = -20\log_{10}\sqrt{[1 - \omega^2/|p_k|^2]^2 + [2\chi_k\omega/|p_k|]^2}$$

$$\Phi PoC = -\mathrm{arctg}(2\chi_k\omega/|p_k|/(1 - (\omega/|p_k|)^2))$$

$$\chi_k = -\frac{Re(p_k)}{|p_k|}$$



χ_K= 1	PoC(p_K)= -6
.75	-3.5
.5	0
.4	1.9
.25	6
.1	14
.01	34



Torniamo alla risposta di un amplificatore reazionato. Ora dobbiamo pensare che A_R e β possano dipendere dalla frequenza:

$$A_f(p) = \frac{A(p)f(\beta,p)}{1+\beta(p)A(p)f(\beta,p)}$$

Osserviamo un fatto fondamentale. Sebbene sia $A_R(p)$ che $\beta(p)$ possano avere poli reali e negativi, non è assolutamente detto che:

$$\frac{1}{1+\beta(j\omega)A(j\omega)f(\beta,j\omega)}$$

soddisfi le stesse condizioni. Anzi, i poli di questa funzione potrebbero essere CC, o anche avere parte reale positiva, se la reazione non fosse adeguatamente progettata.

Possiamo scrivere:

$$\frac{1}{1+\beta(j\omega)A(j\omega)f(\beta,j\omega)} = \frac{1}{1+|\beta(j\omega)A(j\omega)f(\beta,j\omega)|e^{j\vartheta(j\omega)}}$$

La tipica condizione critica che si riscontra si ha quando vengono contemporaneamente soddisfatte le 2 condizioni, per una certa frequenza ω_{OS}:

$$|\beta(j\omega_{os})A(j\omega_{os})f(\beta,j\omega_{os})| = 1 \quad \text{e} \quad \vartheta(j\omega_{os}) = \pi$$

Infatti in questo caso abbiamo che:

$$1+|\beta(j\omega)A(j\omega)f(\beta,j\omega)|e^{j\vartheta(j\omega)} = 1+|1|\big(\cos(\pi)+j\sin(\pi)\big) =$$
$$=1-1=0$$

Questa condizione implica che $A_f(j\omega_{OS})=\infty$.

L'interpretazione precedente dei possibili effetti del comportamento in frequenza sulla struttura reazionate è la più ovvia.

Però c'è anche un'altra considerazione da tenere in conto, basata sulla conseguenza del contenuto complesso dei poli.

La funzione:

$$1+\beta(j\omega)A(j\omega)f(\beta, j\omega)$$

Dopo tutto non è altro che un rapporto tra polinomi. Dal punto di vista della stabilità quello che conta sono i suoi zeri (infatti la funzione in considerazione è a denominatore).

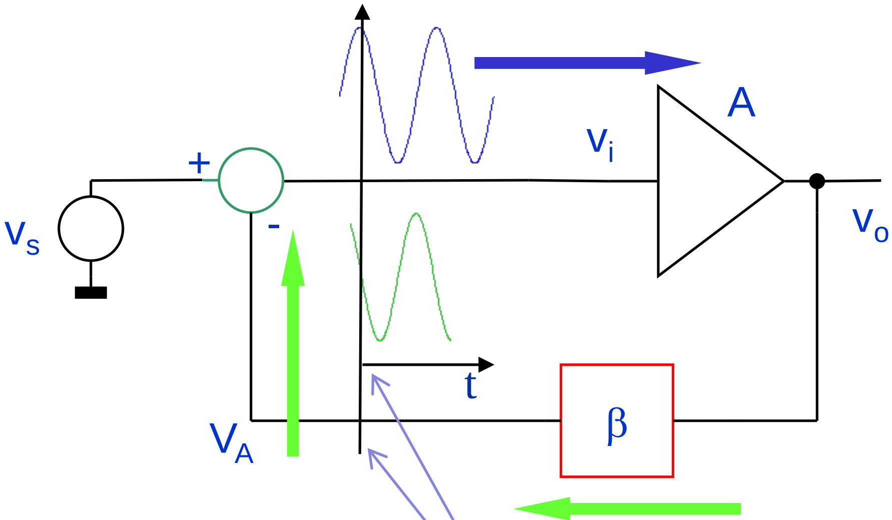
Pertanto, alla luce di quanto visto è fondamentale che la parte reale degli zeri sia negativa, e che la parte complessa sia la più contenuta possibile, in modo da evitare la presenza di effetti oscillatori smorzati accentuati ed indesiderati.

In definitiva, anche se il comportamento in frequenza della rete non fosse l'aspetto fondamentale del progetto, occorre studiare comunque in frequenza il comportamento del denominatore di $A_f(p)$. Essendo il suo denominatore "composto" a priori non si può essere sicuri della regolarità della risposta.

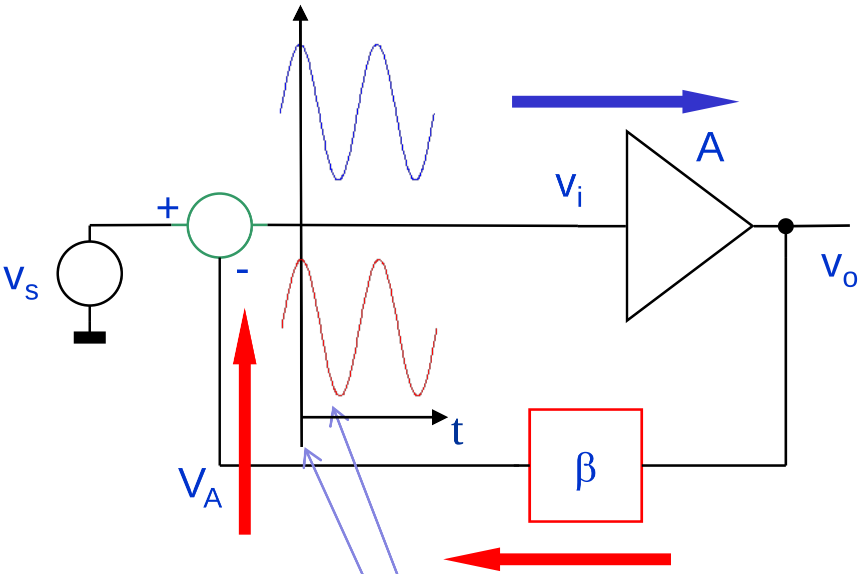
Al riguardo si possono applicare criteri adeguati per costringere il sistema alla risposta desiderata, se non fosse possibile disporre di un AO di caratteristiche dinamiche adeguate ad inizio progetto.

Cosa significa in pratica questa questione sull'instabilità.

Consideriamo un segnale di ingresso che sia un'onda sinusoidale, cosa non limitativa visto che ogni tipo di segnale, anche il rumore, si può considerare come sovrapposizione di onde sinusoidali.



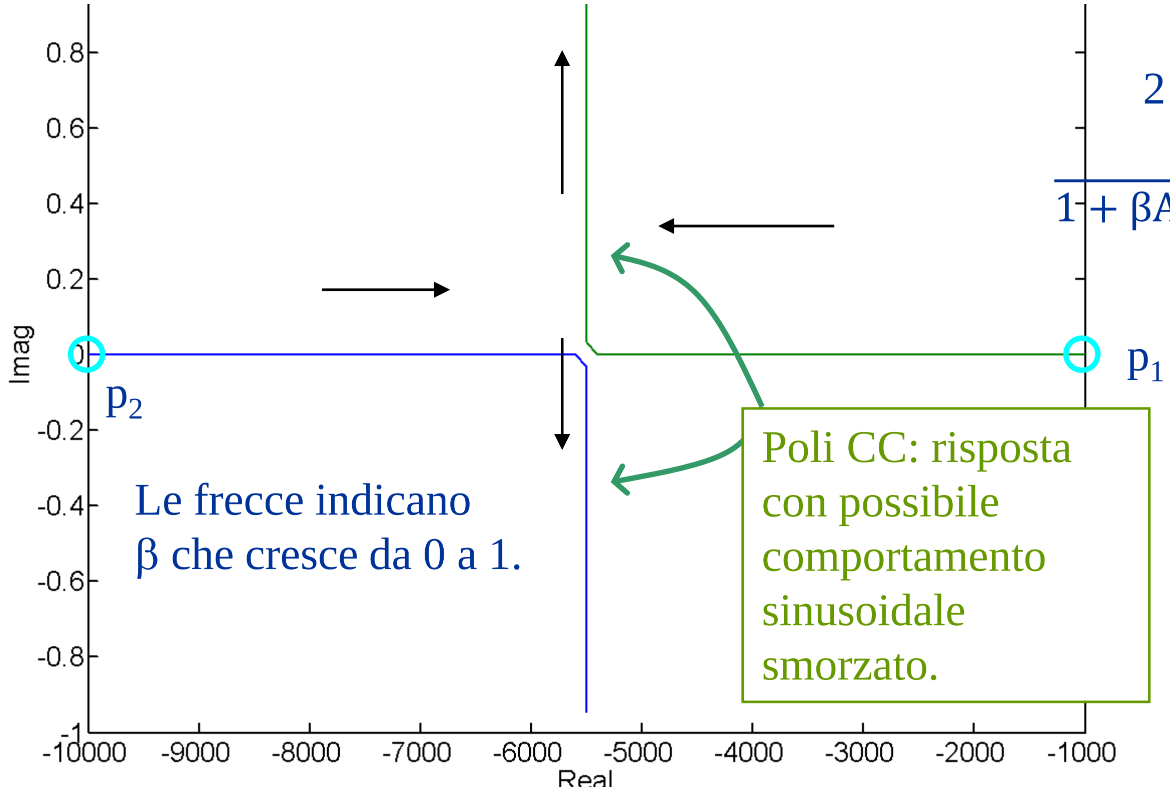
Ritardo del circuito con segnale invertito dopo il nodo di somma: questo ritardo è contenuto.



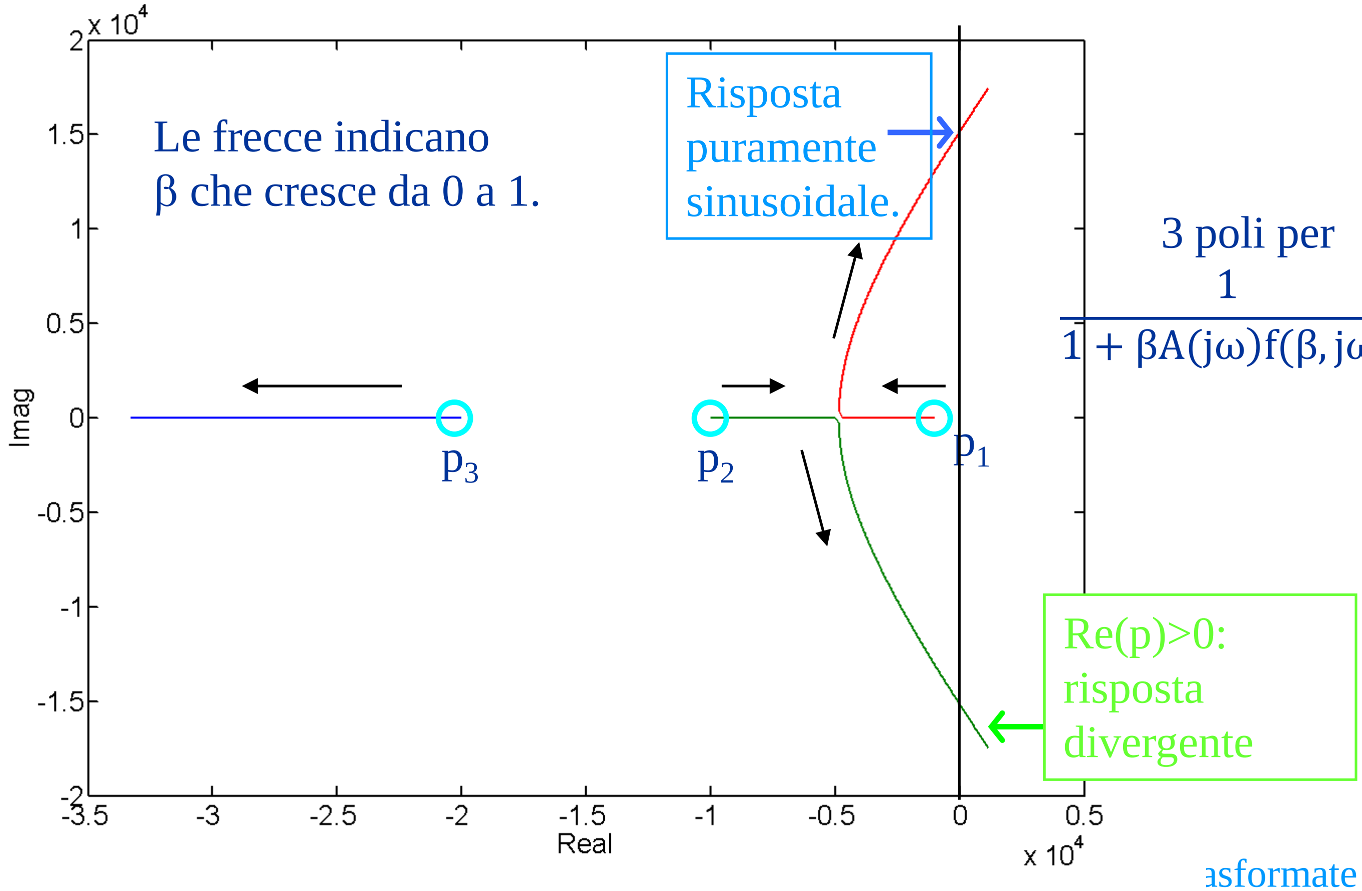
Il ritardo ora è di π e, essendo il segnale di ritorno non-invertito dopo il nodo di somma, si ha una rigenerazione: il segnale dopo il nodo di somma diventerà maggiore del segnale originario.
Per cui il segnale di uscita continuerà ad aumentare fino a condurre l'amplificatore alla saturazione.

………. introduzione ai criteri di stabilità 3

Lo studio dei punti critici di $A_f(j\omega)$ è legato allo studio di $1/[1+\beta(j\omega)A(j\omega)f(\beta, j\omega)]$. Supponiamo, per cominciare, che $\beta \in \Re$ e consideriamo i 2 casi in cui $\beta A(j\omega)f(\beta, j\omega)$ abbia 2 o 3 poli reali e negativi. Supponiamo di variare β da valori poco diversi da 0, ovvero quando il sistema comincia ad essere reazionato, ad 1.



2 poli per $\dfrac{1}{1+\beta A(j\omega)f(\beta, j\omega)}$



3 poli per $\dfrac{1}{1+\beta A(j\omega)f(\beta, j\omega)}$

Vediamo la corrispondenza nel dominio del tempo dei poli CC:

$$A_f(p) = \frac{1}{\beta}\frac{-T}{1-T} = \frac{1}{\beta}\frac{1}{(p/p_o+1)(p/\bar{p}_o+1)}$$

con: $p_o = -\gamma + j\omega_o \ (\gamma < 0)$ (NB: Il polo è a $p=-p_o$)

Consideriamo la risposta alla 1(t) in ingresso: $V_i(t)=1(t)V_{io}$:

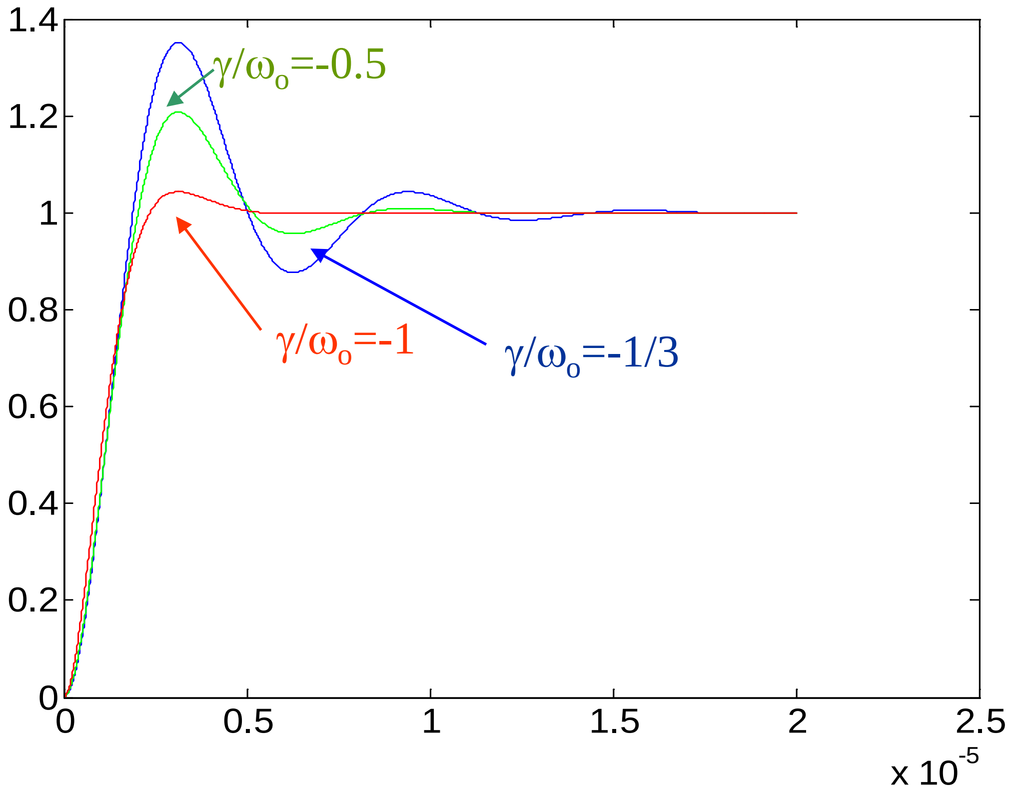
$$V_o(p) = \frac{1}{p}A_f(p)V_{io}$$

L'antitrasformata di questa funzione fornisce un segnale (vedi pag. seguente):

$$V_o(t) = \frac{1}{\beta}\left\{1 + \frac{\gamma}{\omega_o}\sin(\omega_o t)e^{\gamma t} - \cos(\omega_o t)e^{\gamma t}\right\}1(t)$$

Che ha massimo per $\omega_o t=\pi, 3\pi,\ldots$dove si presenta il così detto l'overshoot, o sovra-elongazione:

(a) $$V_o(\pi/\omega_o) = \frac{1}{\beta}\left\{1 + e^{\frac{\gamma}{\omega_o}\pi}\right\} = \frac{1}{\beta}\left\{1 + e^{-\frac{\chi}{\sqrt{1-\chi^2}}\pi}\right\} \qquad \left(\chi_k = -\frac{Re(p_k)}{|p_k|}\right)$$



Dimostrazione della relazione **(a)** della pagina precedente:

$$V_o(p)=\frac{1}{\beta}\,\frac{1}{p}\,\frac{1}{(p/p_o+1)(p/\bar{p}_o+1)}V_{io}=\frac{p_o\bar{p}_o}{\beta}\frac{1}{p}\frac{1}{(p+p_o)(p+\bar{p}_o)}$$
$$=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+p_o}+\frac{\bar{B}}{p+\bar{p}_o}$$

$$A=\lim_{p\to 0}pV_o(p)=\frac{1}{\beta}$$

$$B=\lim_{p\to -p_o}(p+p_o)V_o(p)=\frac{p_o\bar{p}_o}{\beta}\left(-\frac{1}{p_o}\right)\frac{1}{\bar{p}_o-p_o}=\frac{1}{\beta}\frac{\bar{p}_o}{p_o-\bar{p}_o}$$

$$\bar{B}=\frac{1}{\beta}\frac{p_o}{\bar{p}_o-p_o}$$

Quindi: $$V_o(p)=\frac{1}{\beta}\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{p_o-\bar{p}_o}\left[\frac{\bar{p}_o}{p+p_o}-\frac{p_o}{p+\bar{p}_o}\right]\right\}V_{io}$$

Posto: $$p_o=-\gamma+j\omega_o=|p_o|e^{j\vartheta},\ \vartheta=\mathrm{arctg}\left(-\frac{\omega_o}{\gamma}\right)=-\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega_o}{\gamma}\right)$$

Nel dominio del tempo è:

$$V_o(t)=\frac{1}{\beta}\left\{1+\frac{|p_o|}{2j\omega_o}\,e^{\gamma t}\left[e^{-j(\omega_o t+\vartheta)}-e^{j(\omega_o t+\vartheta)}\right]\right\}1(t)V_{io}$$
$$=\frac{1}{\beta}\left\{1-\frac{|p_o|}{\omega_o}e^{\gamma t}\sin(\omega_o t+\vartheta)\right\}1(t)V_{io}$$
$$=\frac{1}{\beta}\left\{1-\frac{|p_o|}{\omega_o}e^{\gamma t}\left[\cos(\vartheta)\sin(\omega_o t)+\sin(\vartheta)\cos(\omega_o t)\right]\right\}1(t)V_{io}$$
$$=\frac{1}{\beta}\left\{1-e^{\gamma t}\left[-\frac{\gamma}{\omega_o}\sin(\omega_o t)+\cos(\omega_o t)\right]\right\}1(t)V_{io}$$

Testi di riferimento

E.Gatti, P.F.Manfredi, A.Rimini   Elementi di teoria delle reti lineari
Casa Editrice Ambrosiana 1966

A.Papoulis   Signal Analysis
Mc Graw Hill 1984

J.A.Stratton

Teoria dell'Elettromagnetismo

Edizioni Scientifiche Einaudi, 1952, 537.STRJ.TEO/1952BS

L.P.Huelsman

An Introduction to Active and Passive Analog Filter Design

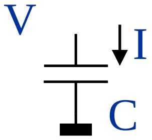
McGraw Hill, 1993, 621.3815324.HUel.ACT/1993

P.H.Horowittz, W.Hill

The Art of Electronics

Cambridge University Press, 1991

APPENDICE A 1



La carica immagazzinata in un condensatore è legata alla tensione presente ai suoi capi:

$$Q = CV$$

Essendo la corrente la derivata della carica:

$$I = C\frac{dV}{dT}$$

Nel dominio delle trasformate questa espressione è rappresentata da:

$$I = sCV$$

Stante la proporzionalità si assegna al condensatore un'impedenza complessa:

$$Z_C = \frac{1}{sC}$$

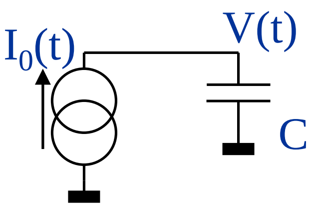
Però abbiamo che:

$$V(t) = V(0) + \frac{1}{C}\int_0^t I(t) \quad dt$$

Come tenere conto della condizione iniziale nel campo delle trasformate?

Consideriamo la funzione:

$$I_0(t) = Q(0^-)\delta(t) = CV(0^-)\delta(t) \quad \Rightarrow \quad I_0(s) = CV(0^-)$$

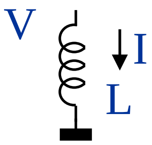


$$V(s) = \frac{1}{sC} I_0(s) = \frac{1}{sC} CV(0^-) = \frac{V(0^-)}{s}$$

Quindi:

$$V(t) = V(0^-)1(t)$$

Per il principio di sovrapposizione ogni altro segnale presente nella rete si aggiungerà alla condizione iniziale considerata.



Il flusso di campo magnetico immagazzinato in un induttore è legato alla corrente che vi circola:

$$\Phi = LI$$

Essendo la forza elettromotrice indotta la derivata del flusso:

$$V = L\frac{dI}{dT}$$

Nel dominio delle trasformate questa espressione è rappresentata da:

$$V = sLI$$

Stante la proporzionalità si assegna all’ induttore un’impedenza complessa:

$$Z_L = sL$$

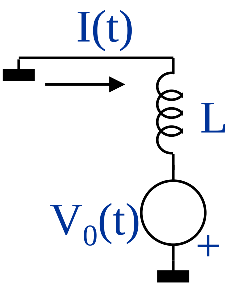
Però abbiamo che:

$$I(t) = I(0) + \frac{1}{L}\int_0^t V(t) \quad dt$$

Come tenere conto della condizione iniziale nel campo delle trasformate?

Consideriamo la funzione:

$$V_0(t) = \Phi(0^-)\delta(t) = LI(0^-)\delta(t) \;\Rightarrow\; V_0(s) = LI(0^-)$$

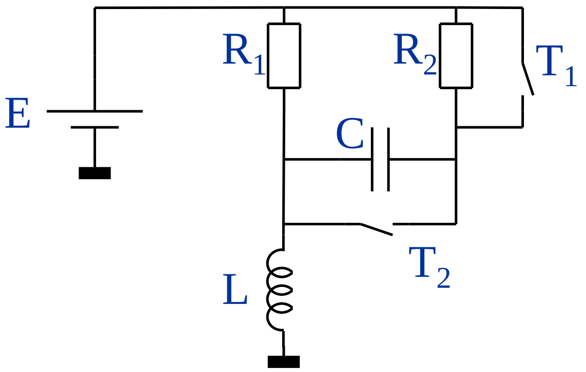


$$I(s) = \frac{1}{sL}V_0(s) = \frac{1}{sL}LI(0) = \frac{I(0^-)}{s}$$

Quindi:

$$I(t) = I(0^-)1(t)$$

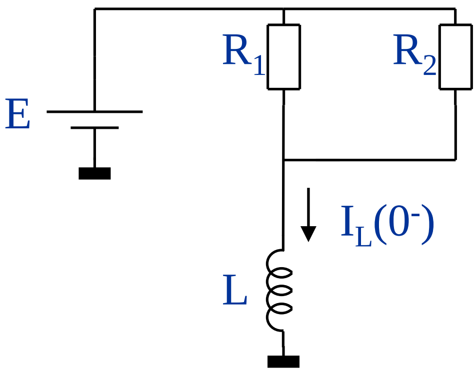
Per il principio di sovrapposizione ogni altro segnale presente nella rete si aggiungerà alla condizione iniziale considerata.



$$\begin{cases} t \le 0: & T_1 \text{ aperto e } T_2 \text{ chiuso} \\ t > 0: & T_1 \text{ chiuso e } T_2 \text{ aperto} \end{cases}$$

Valutare: $I_L(s)$, $I_L(0^+)$, $I_L(\infty)$ e $V_C(0^+)$.

Per prima cosa dobbiamo valutare le condizioni iniziali, di regime, presenti prima dell'istante chiamato t=0. Il circuito da considerare è:

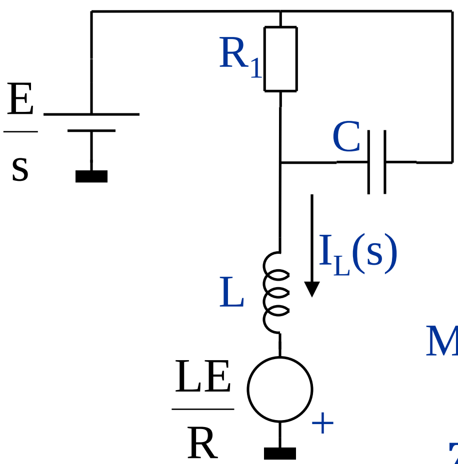


Detto $R=R_1||R_2$ si ottiene che la corrente che scorre nell'induttanza prima della commutazione dei 2 interruttori è:

$$I_L(0^-) = \frac{E}{R}$$

Mentre la ddp ai capi del condensatore è banalmente: $V_C(0^-)=0$ V.

Di conseguenza in serie all'induttanza va posto un generatore di tensione avente intensità: $V_L(t)=LE/R\delta(t)$, mentre in parallelo al condensatore va posto un generatore di corrente identicamente nullo: $I_C(t)=C0\delta(t)=0$.

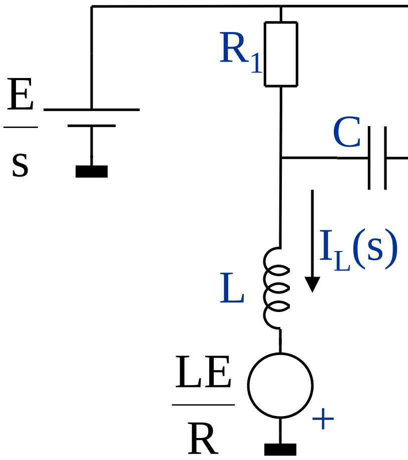


Detta: $Z=R_1||C$, risulta che:

$$I_L(s) = \left(\frac{E}{s} + \frac{LE}{R}\right) \frac{1}{(Z + sL)}$$

Ma:

$$Z = \left(\frac{1}{R_1} + sC\right)^{-1} = \left(\frac{1 + sC}{R_1}\right)^{-1} = \frac{R_1}{1 + sCR_1}$$



Quindi:

$$I_L(s) = \left(\frac{E}{s} + \frac{LE}{R}\right) \frac{1 + sCR_1}{(R_1 + sL + s^2LCR_1)}$$

Vediamo i limiti:

$$I_L(0^+) = \lim_{s\to\infty} s \left(\frac{E}{s} + \frac{LE}{R}\right) \frac{1 + sCR_1}{(R_1 + sL + s^2LCR_1)} = \lim_{s\to\infty} \frac{LE}{R} \frac{s^2CR_1}{s^2LCR_1} = \frac{E}{R}$$

$$I_L(\infty) = \lim_{s\to 0} s \left(\frac{E}{s} + \frac{LE}{R}\right) \frac{1 + sCR_1}{(R_1 + sL + s^2LCR_1)} = \frac{E}{R_1}$$

Inoltre ai capi di C abbiamo:

$$V_C(s) = \frac{R_1}{1 + sCR_1} I_L(s) = \left(\frac{E}{s} + \frac{LE}{R}\right) \frac{R_1}{(R_1 + sL + s^2LCR_1)}$$

Di conseguenza:

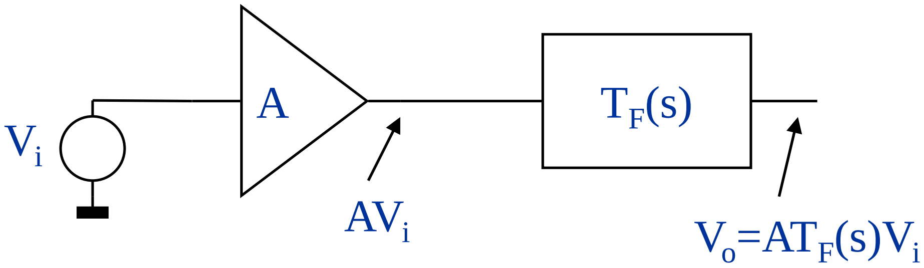
$$V_C(0^+) = \lim_{s\to\infty} s \left(\frac{E}{s} + \frac{LE}{R}\right) \frac{R_1}{(R_1 + sL + s^2LCR_1)} = \lim_{s\to\infty} \frac{LE}{R} \frac{sR_1}{s^2LCR_1} = 0$$

Come era da aspettarsi visto che in un tempo trascurabile non è possibile cambiare la ddp ai capi di un condensatore.

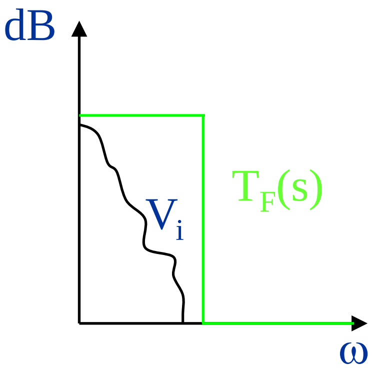
APPENDICE B 1

Si supponga di dovere elaborare un segnale di cui si conosce la larghezza di banda, ma non sia predeterminata la forma del segnale. Un esempio classico è il segnale audio, avente un'estensione di banda di circa 20 KHz, ma con tonalità non predeterminate.

Per questioni riguardanti soprattutto i disturbi che possono venire sovrapposti, non è mai conveniente trattare il segnale su di una banda di frequenza superiore a quella del segnale. E' opportuno aggiungere in cascata alla catena di amplificazione un filtro con caratteristiche opportune:

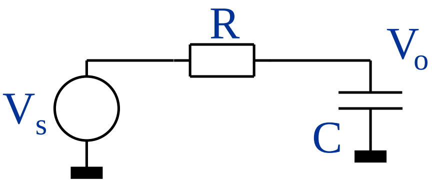


Idealmente il filtro posto in cascata dovrebbe avere una sagoma "squadrata". Sebbene con i filtri così detti attivi ci si riesce ad avvicinare, con i filtri così detti passivi ci si avvicina solo in forma asintotica.



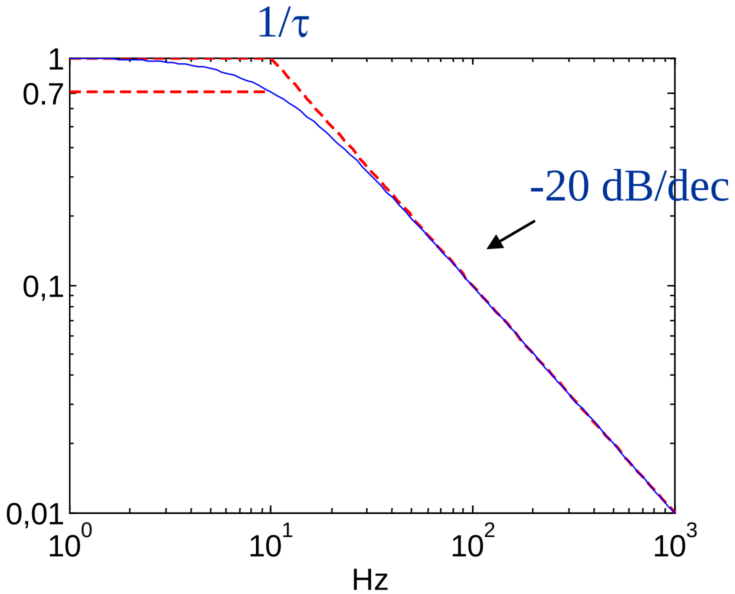
Vale a dire che un filtro passivo applica una certa attenuazione nella banda utile del segnale, con una perdita di segnale.

Il più semplice filtro passa-basso passivo che si possa realizzare è il filtro RC:



$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{1}{1 + sCR} = \frac{1}{1 + s\tau}$$

$$\left|\frac{V_o}{V_s}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$



Alla frequenza del polo, $1/\tau$, è:

$$\boxed{\left|\frac{V_o}{V_s}\right|_{\omega=1/\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7 = -3\text{ dB}}$$

Proprietà importante utile per una caratterizzazione di un circuito:

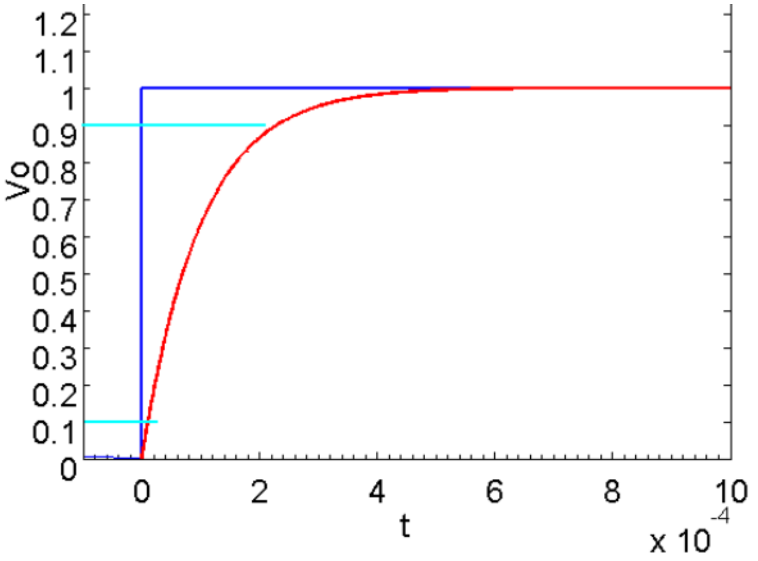
Applichiamo al filtro un gradino $V_s(t)=V_A 1(t)$:

$$V_o = \frac{1}{1 + s\tau}\frac{V_A}{s} = \frac{1}{\tau}\frac{1}{s}\frac{1}{s + 1/\tau}V_A = \frac{1}{\tau}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1/\tau}\right]V_A$$

$$= \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau}\right]V_A \;\Rightarrow\; V_o(t) = \left[1 - e^{-t/\tau}\right]1(t)V_A$$

Dalla curva ottenuta il valore di τ lo si ricava come soglia oltre la quale si ha il valore asintotico. Per esempio a $t=5\tau$ V_o è uguale a V_A a meno dello 0.5 %.

Questo asproccio però non è sempre il più preciso, specialmente quando i segnali sono piccoli e la risoluzione dello strumento di misura potrebbe creare limitazioni.



Più semplice è trovare i punti in cui il segnale passa attraverso 2 valori ben definiti.

Un approccio standard è considerare la differenza temporale degli istanti a cui il segnale supera il 10 % ed il 90 % di tutta la sua ampiezza.

Supponiamo di volere trovare l'istante t_α in cui $V_O(t_\alpha)=\alpha V_A$, $\alpha\leq 1$:

$$t_\alpha = \tau \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$$

In particolare: $\begin{cases} t_{0.1} = 0.105\tau \ \text{ per } \ \alpha = 0.1 \\ t_{0.9} = 2.303\tau \ \text{ per } \ \alpha = 0.9 \end{cases}$

Si definisce "rise time" la differenza $t_r=t_{0.9}-t_{0.1}$:

$$\boxed{t_r = t_{0.9} - t_{0.1} \approx 2.2\,\tau = \frac{2.2}{\omega_{3dB}} = \frac{2.2}{2\pi}\frac{1}{f_{3dB}} = \frac{0.35}{f_{3dB}}}$$

Questa definizione ha un carattere più generale. Ogni volta che vogliamo fornire una caratterizzazione semplificata del comportamento in frequenza di una rete la modellizziamo con un polo dominante caratteristico a cui possiamo associare la misura di rise time sopra indicata.

Questo metodo qualitativo di valutazione della risposta in frequenza si presta anche ad un'analisi nel caso in cui la funzione di trasferimento abbia 2 o più poli. Vediamo come.

Supponiamo che la funzione di trasferimento sia del tipo:

$$F(\omega) = \frac{1}{1+s\tau_A}\frac{1}{1+s\tau_B}, \qquad \text{supponiamo che sia } \tau_A \gg \tau_B$$

Forziamo la condizione a -3 dB, ovvero attenuazione a $1/\sqrt{2}$:

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad |F(\omega)|^2 = \frac{1}{2}$$

Quindi:

$$\frac{1}{1+\omega^2\tau_A^2}\frac{1}{1+\omega^2\tau_B^2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(1+\omega^2\tau_A^2\right)\left(1+\omega^2\tau_B^2\right) = 2$$

$$\omega^4\tau_A^2\tau_B^2 + \left(\tau_A^2+\tau_B^2\right)\omega^2 + 1 = 2$$

$$\omega^4\tau_A^2\tau_B^2 + \left(\tau_A^2+\tau_B^2\right)\omega^2 - 1 = 0$$

Ovvero:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{-(\tau_A^2+\tau_B^2) \pm \sqrt{(\tau_A^2+\tau_B^2)^2 + 4\tau_A^2\tau_B^2}}{2\tau_A^2\tau_B^2}$$

Dove siamo interessati alle sole soluzioni positive:

$$\omega_1^2 = \frac{-(\tau_A^2+\tau_B^2) + \sqrt{(\tau_A^2+\tau_B^2)^2 + 4\tau_A^2\tau_B^2}}{2\tau_A^2\tau_B^2}$$

$$\omega_1^2 = \frac{-(\tau_A^2+\tau_B^2) + \sqrt{(\tau_A^2+\tau_B^2)^2 + 4\tau_A^2\tau_B^2}}{2\tau_A^2\tau_B^2}$$

$$\omega_1^2 = \frac{-\left(\tau_A^2+\tau_B^2\right)}{2\tau_A^2\tau_B^2}\left(1 - \sqrt{1+\frac{4\tau_A^2\tau_B^2}{\left(\tau_A^2+\tau_B^2\right)^2}}\right)$$

$$\omega_1^2 \approx \frac{-\left(\tau_A^2+\tau_B^2\right)}{2\tau_A^2\tau_B^2}\left(1-\left(1+\frac{2\tau_A^2\tau_B^2}{(\tau_A^2+\tau_B^2)^2}\right)\right)$$

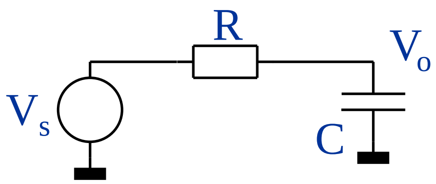
$$\omega_1^2 \approx \frac{1}{\tau_A^2+\tau_B^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 \approx \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\omega_A^2}+\frac{1}{\omega_B^2}}}$$

$$t_r \approx \frac{2.2}{\omega_1} \approx 2.2\sqrt{\frac{1}{\omega_A^2}+\frac{1}{\omega_B^2}} \quad \Rightarrow \quad t_r \approx \frac{2.2}{\omega_1} \approx \sqrt{\left(\frac{2.2}{\omega_A}\right)^2+\left(\frac{2.2}{\omega_B}\right)^2}$$

$$\boxed{t_r \approx \sqrt{t_{rA}^2+t_{rB}^2}}$$

Cioè il rise time risultante è la radice della somma quadratica dei rise time parziali. Questa approssimazione è comoda, per esempio, quando lo strumento con cui si sta effettuando la misura non ha una larghezza di banda >> del dispositivo sotto misura. In quel caso si ottiene che:

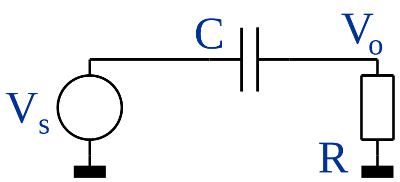
$$t_{r\_dispositivo} \approx \sqrt{t_{r\_misurato}^2 - t_{r\_strumento}^2}$$



Se nel filtro passa basso indicato abbiamo che τ >> di tutte le altre costanti di tempo della rete possiamo approssimare:

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{1}{1 + s\tau} \approx \frac{1}{s\tau}$$

Ovvero il circuito è approssimabile ad un quasi-integratore.
Equivalentemente, filtrare a basse frequenze un segnale significa farne un'integrazione.



Come controparte del quasi-integratore abbiamo il quasi-derivatore:

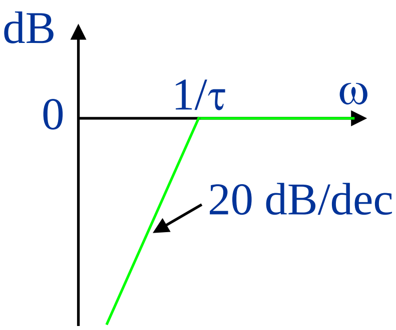
$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{sRC}{1 + sRC} = \frac{s\tau}{1 + s\tau}$$

In questa circostanza se la costante di tempo τ risultasse << di tutte le costanti di tempo della rete, potremmo approssimare:

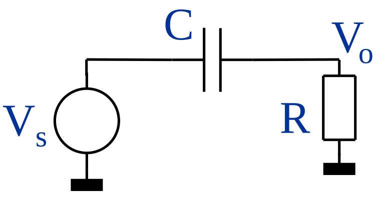
$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{s\tau}{1 + s\tau} \approx s\tau$$

La rete si comporterebbe pertanto come un quasi-derivatore.

Filtrare ad alta frequenza un segnale equivale a dire che lo si differenzia.

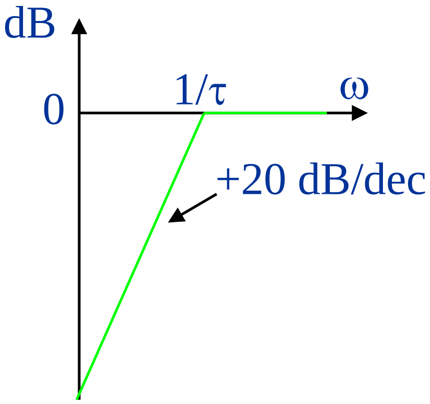


Il più semplice filtro passa-alto passivo che si possa realizzare è il filtro CR:



$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{sCR}{1 + sCR} = \frac{s\tau}{1 + s\tau}$$

$$\left|\frac{V_o}{V_s}\right| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$



Alla frequenza del polo, $1/\tau$, è:

$$\boxed{\left|\frac{V_o}{V_s}\right|_{\omega=1/\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7 = -3\ \text{dB}}$$

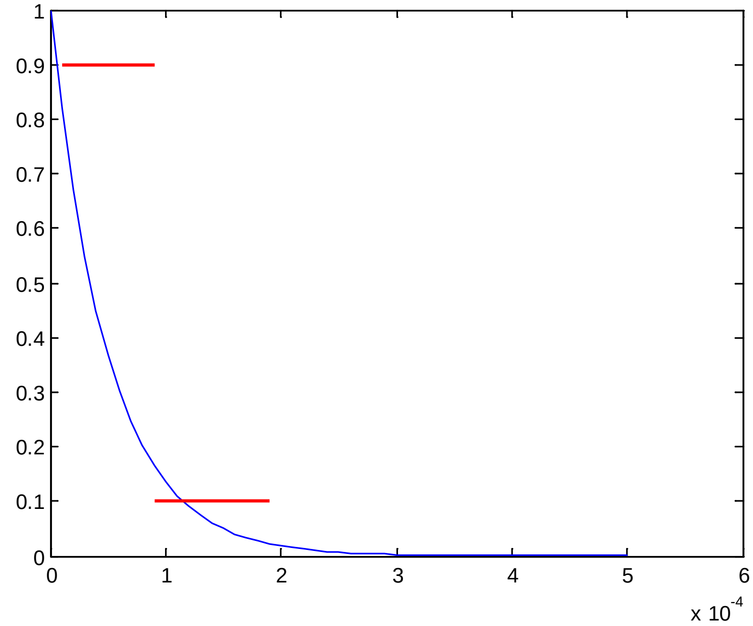
Proprietà importante utile per una caratterizzazione di un circuito:

Applichiamo al filtro un gradino $V_s(t)=V_A 1(t)$:

$$V_o = \frac{s\tau}{1 + s\tau}\frac{V_A}{s} = \frac{1}{s + 1/\tau} V_A$$

$$\Rightarrow \quad V_o(t) = e^{-t/\tau}\, 1(t) V_A$$

Come nel caso precedente possiamo cercare di caratterizzare l'accoppiamento AC con la stessa tecnica.



Consideriamo ancora la differenza temporale degli istanti a cui il segnale scende da 90 % al 10 % della sua ampiezza.

Ancora avremo che l'istante t_α in cui $V_O(t_\alpha)=\alpha V_A$, $\alpha \leq 1$:

$$t_\alpha = \tau \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$$

In particolare:

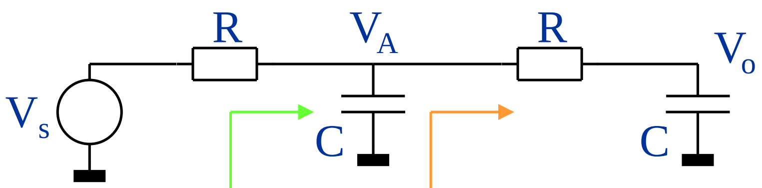
$$\begin{cases} t_{0.1} = 2.303\tau \ \text{ per } \ \alpha = 0.1 \\ t_{0.9} = 0.105\tau \ \text{ per } \ \alpha = 0.9 \end{cases}$$

Si definisce "fall time" la differenza $t_r=t_{0.1}-t_{0.9}$:

$$\boxed{t_r = t_{0.1} - t_{0.9} \approx 2.2\,\tau = \frac{2.2}{\omega_{3dB}} = \frac{2.2}{2\pi}\,\frac{1}{f_{3dB}} = \frac{0.35}{f_{3dB}}}$$

In questa circostanza f_{3dB} rappresenta la frequenza di accoppiamento in AC.

I filtri a singolo polo hanno il difetto di mostrare un'attenuazione di 20 dB/dec, oltre alla frequenza del polo. E' ovviamente possibile garantire pendenze più ripide.



$$Z_A = \frac{1}{sC} \| Z_o \qquad Z_o = \frac{1 + sCR}{sC}$$

$$V_A = \frac{Z_A}{Z_A + R} V_s \qquad V_o = \frac{1}{1 + sCR} V_A \qquad V_o = \frac{1}{1 + sCR} \frac{Z_A}{Z_A + R} V_s$$

Da cui:

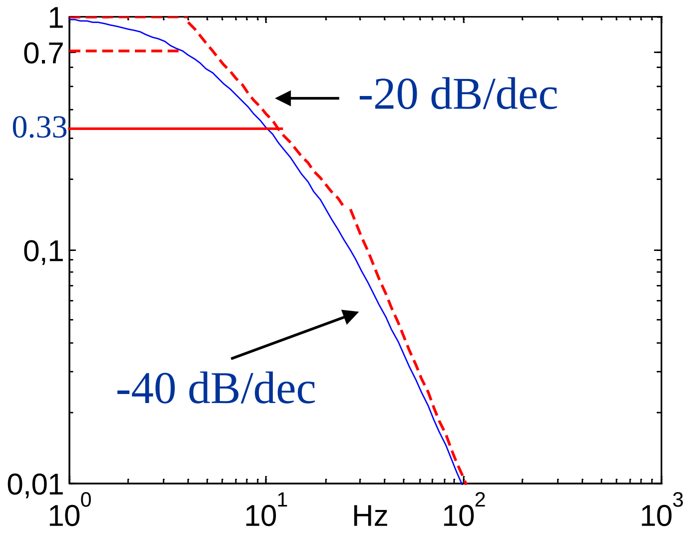
$$V_o = \frac{1}{s^2C^2R^2 + 3sCR + 1} V_s \qquad \left|\frac{V_o}{V_s}\right| = \frac{1}{\sqrt{9\omega^2C^2R^2 + (1 - \omega^2C^2R^2)^2}}$$

Va osservato che la funzione presenta 2 poli che non coincidono con 1/RC. In particolare per ω=1/RC l'attenuazione risulta:

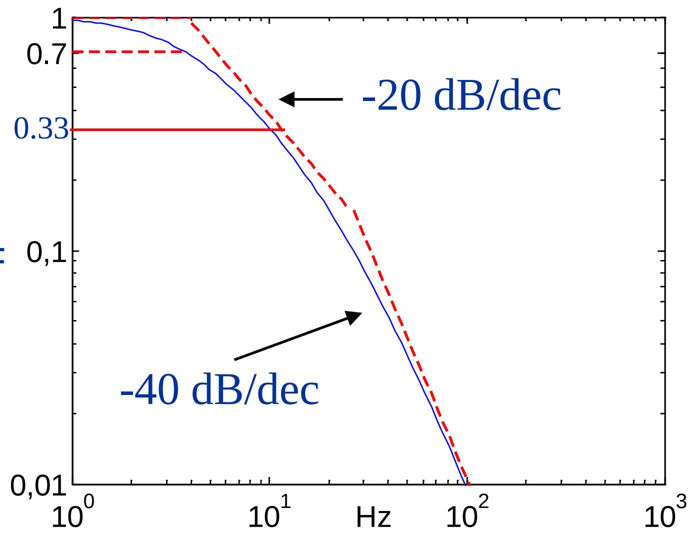
$$\left|\frac{V_o}{V_s}\right|_{\omega=1/RC} = \frac{1}{3} = 0.33 = -9.5 \text{ dB}$$

I 2 poli si trovano invero a:

$$p_{1,2} = \begin{cases} -\dfrac{0.381}{CR} \\ -\dfrac{2.618}{CR} \end{cases}$$



Possiamo cercare di verificare quale sia la frequenza in cui l'attenuazione sia di -3 db, ripartendo dal modulo della funzione di trasferimento:



$$\left|\frac{V_o}{V_s}\right| = \frac{1}{\sqrt{9\omega^2C^2R^2 + (1-\omega^2C^2R^2)}}$$

Per imporre che sia:

$$\frac{1}{9\omega^2C^2R^2 + (1-\omega^2C^2R^2)^2} = \frac{1}{2}$$

$$9\omega^2C^2R^2 + (1-\omega^2C^2R^2)^2 = 2$$

$$9\omega^2C^2R^2 + (1-\omega^2C^2R^2)^2 = 2$$

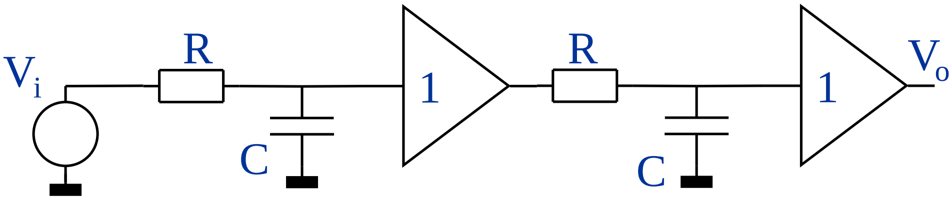
$$\omega^4C^4R^4 + 1 - 2\omega^2C^2R^2 + 9\omega^2C^2R^2 - 2 = 0$$

$$\omega^4C^4R^4 + 7\omega^2C^2R^2 - 1 = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{-7C^2R^2 \mp \sqrt{49C^4R^4 + 4C^4R^4}}{2C^4R^4}$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{-7+\sqrt{53}}{2C^2R^2} \approx \frac{0,14}{C^2R^2} \qquad \omega_1 \approx \frac{0,37}{CR}$$

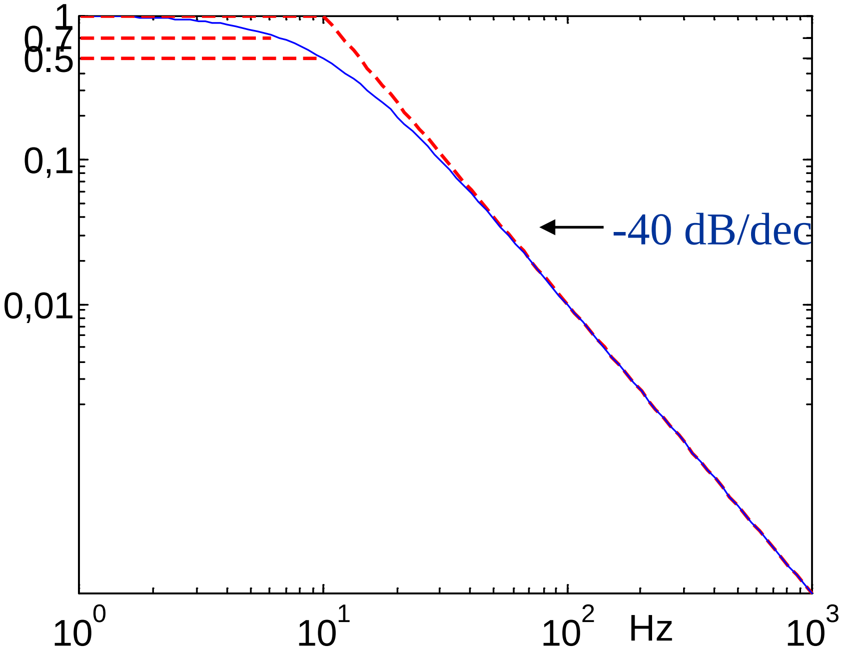
Poli doppi reali e coincidenti:



$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{1}{(1+sRC)^2} \Rightarrow \left|\frac{V_0}{V_i}\right| = \frac{1}{(1+\omega^2R^2C^2)}$$

I poli si trovano a: $$p_{1,2} = -\frac{1}{RC}$$

Ora per ω=1/RC l'attenuazione risulta di 0.5, ovvero -6 dB.

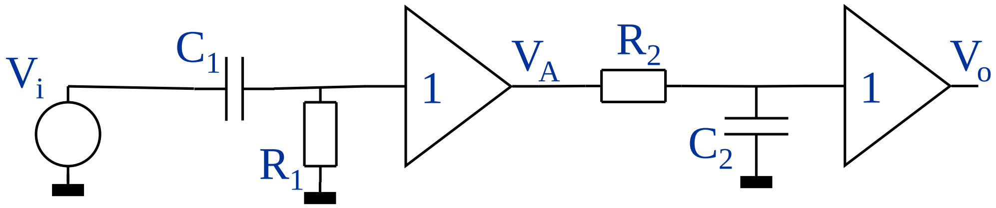


La frequenza -3dB non coincide con la posizione dei 2 poli, ma con la frequenza:

$$\frac{1}{\left(1+\omega_{3dB}^2R^2C^2\right)} = 0.7 \Rightarrow \omega_{3dB} = \frac{0.65}{\tau}$$

APPENDICE D

Consideriamo l'opportunità di implementare una rete che consenta di filtrare una banda di frequenza. Questo tipo di approccio si adotta spesso quando si sa che il segnale ha dei contenuti informatavi definiti, di cui non si conosce a priori la forma.

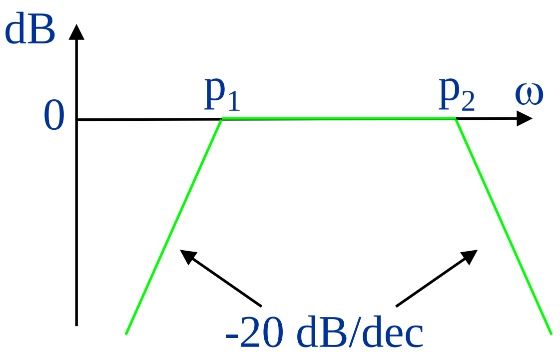


$$V_A = \frac{sC_1R_1}{1 + sC_1R_1} V_i$$

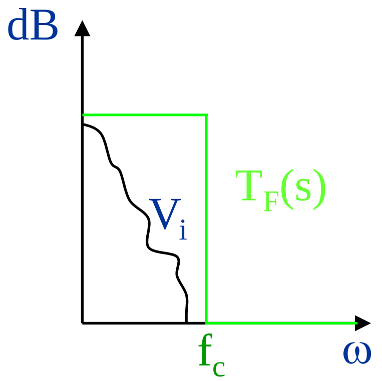
V_A ha uno zero nell'origine. Quindi viene applicata una derivazione del segnale di ingresso: le componenti di bassa frequenza vengono perciò attenuate.

$$V_o = \frac{1}{1 + sC_2R_2} V_A \qquad V_o = \frac{1}{1 + sC_2R_2} \frac{sC_1R_1}{1 + sC_1R_1} V_i$$

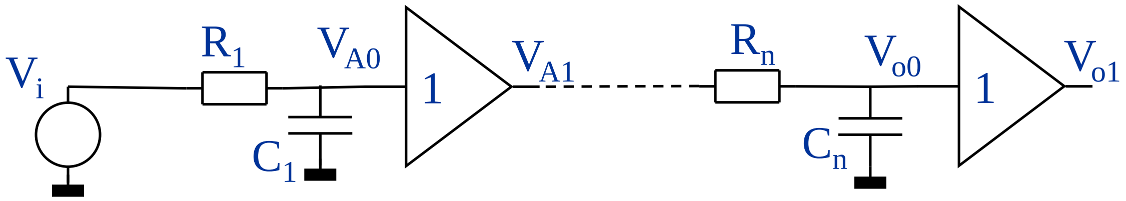
Supponiamo, come esempio, che la frequenza di taglio del filtro passa alto sia molto minore di quella del filtro passa basso: $1/C_2R_2 >> 1/C_1R_1$. Il profilo che otteniamo presenta un'attenuazione di -3dB alle frequenze dei 2 poli, che verranno a coincidere con $1/C_1R_1$ e $1/C_2R_2$:



Ritorniamo sul problema di volere realizzare un filtro passa-basso con caratteristiche che si avvicinino il più possibile alla risposta quadrata.



Sulla base delle conoscenze maturate fino ad ora dovremmo porre in cascata n filtri passa-basso a singolo polo, dove, per comodità, $R_1=\ldots=R_n$ e $C_1=\ldots=C_n$:



In questo caso ogni capacità si trova in || l'alta impedenza di ingresso dell'amplificatore a guadagno unitario. Per cui avremo:

$$V_{A0} = \frac{1}{1+sR_2C_2}V_i, \qquad V_{A1} = V_{A0}$$

$$V_{B0} = \frac{1}{1+sR_2C_2}V_{A0}, \qquad V_{B1} = V_{B0}$$

$$\ldots$$

$$V_{o0} = \frac{1}{1+sR_nC_n}V_{x0}, \qquad V_{o1} = V_{o0}$$

Essendo tutte le resistenze e tutte le capacità di uguale valore:

$$V_o = \frac{1}{(1+sRC)^n}V_i$$

$$V_o = \frac{1}{(1+sRC)^n} V_i \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{V_o}{V_i}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1+\omega^2R^2C^2)^n}}$$

Alla frequenza dei poli $\omega_o = 1/RC = 2\pi f_0$ l'attenuazione risulta:

$$\left|\frac{V_o}{V_i}\right|_{\omega=\omega_o} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}$$

Visto che l'attenuazione a ω_o è molto pronunciata andiamo a cercare la frequenza per cui l'attenuazione risulta invece di -3 dB. Ovvero definiamo ω_c la frequenza tale che:

$$\frac{1}{\sqrt{[1+(\omega_c/\omega_o)^2]^n}} = 0.7 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

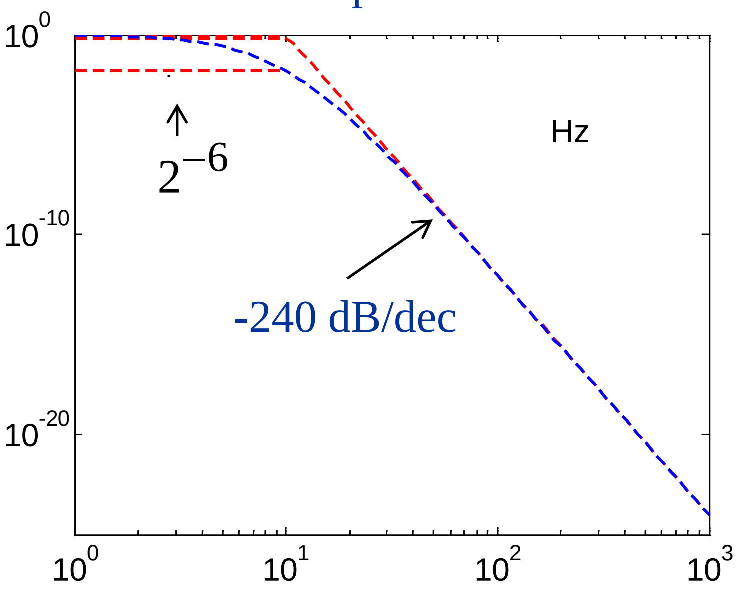
$$[1+(\omega_c/\omega_o)^2]^n = 2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\omega_c}{\omega_o}\right)^2 = 2^{1/n} - 1 \Rightarrow \quad \frac{\omega_c}{\omega_o} = \sqrt{2^{1/n} - 1}$$

È forse più significativo considerare il rapporto inverso:

$$\frac{\omega_o}{\omega_c} = \frac{1}{\sqrt{2^{1/n} - 1}}$$

n	ω_o/ω_c
2	1.52
4	2.26
8	3.27
12	4.04

12 poli



Va osservato che essendo $\omega_0 > \omega_c$ la discesa dell'ampiezza dell'uscita non inizia l'andamento asintotico a partire dalla frequenza -3 dB.

E’ possibile realizzare filtri con funzioni di trasferimento che cercano di avvicinarsi alle condizioni ideali. Nella forma classica questi filtri sono composti da resistori, condensatori ed induttanze. Purtroppo le induttanze sono componenti “scomodi” perché occupano spazio, non sono precise, mostrano dipendenza dalla temperatura.

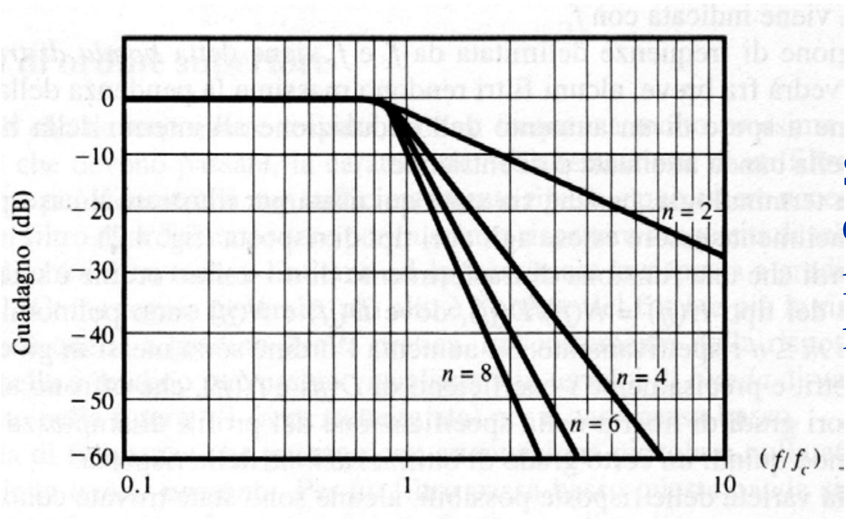
Nelle applicazioni coinvolgenti AO reazionati le induttanze possono essere comodamente sostituite dagli AO stessi, in grado di gestire l’energia assorbita dalle alimentazioni in modo analogo alle induttanze, se reazionati in modo opportuno.

I filtri che fanno uso degli AO in luogo delle induttanze vengono chiamati “filtri attivi”, in contrapposizione con i filtri passivi che impiegano solo resistenze e condensatori.

I filtri di Butterworth

L’idea è quella di realizzare una funzione a più poli capace di mostrare la stessa attenuazione alla frequenza di taglio a -3 dB indipendente dal numero di poli impiegati:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1 + (f/f_c)^{2n}]}}$$



Secondo questa ottica si ottimizza il modulo della funzione di trasferimento, non la fase.

Mettiamo in evidenza la differenza fondamentale tra un filtro attivo, che stiamo iniziando a studiare, ed un filtro a n poli in cascata che abbiamo visto:

$$|H_{npoli}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1 + (f_c/f_0)^2]^{\,n}}}$$

$$|H_{npoli}(2\pi f_o)| = \frac{1}{\sqrt{2^n}}$$

Differenza fondamentale rispetto a sotto: l'attenuazione alla frequenza di taglio

$$|H_{npoli}(2\pi f)| \xrightarrow{f\to\infty} \frac{f_o^n}{f^n}$$

Il comportamento asintotico è invece il medesimo al filtro sotto

$$|H_{attivo}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1 + (f/f_c)^{2n}]}}$$

$$|H_{attivo}(2\pi f_o)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Differenza fondamentale rispetto a sopra: l'attenuazione alla frequenza di taglio

$$|H_{attivo}(2\pi f)| \xrightarrow{f\to\infty} \frac{f_c^n}{f^n}$$

Il comportamento asintotico è invece il medesimo al filtro sopra

Come ricavare la funzione matematicamente ed anche con una rete attiva?

Matematicamente si agisce algebricamente.

Es. a 2 poli.

Supponiamo di essere in grado di realizzare funzioni a 2 poli:

$$\left|\frac{1}{(s/\omega_{inc})^2 + 1/Q(s/\omega_{inc}) + 1}\right|^2 =$$

$$= \left|\frac{1}{(1-(f/f_{inc})^2) \quad + jf/Qf_{inc}}\right|^2 \overset{\text{Tesi}}{=} \frac{1}{1+(f/f_c)^4}$$

$$\frac{1}{(1-(f/f_{inc})^2)^2 + (f/Qf_{inc})^2} =$$

$$= \frac{1}{1+(f/f_{inc})^4 - 2(f/f_{inc})^2 + (f/Qf_{inc})^2} = \frac{1}{1+(f/f_c)^4}$$

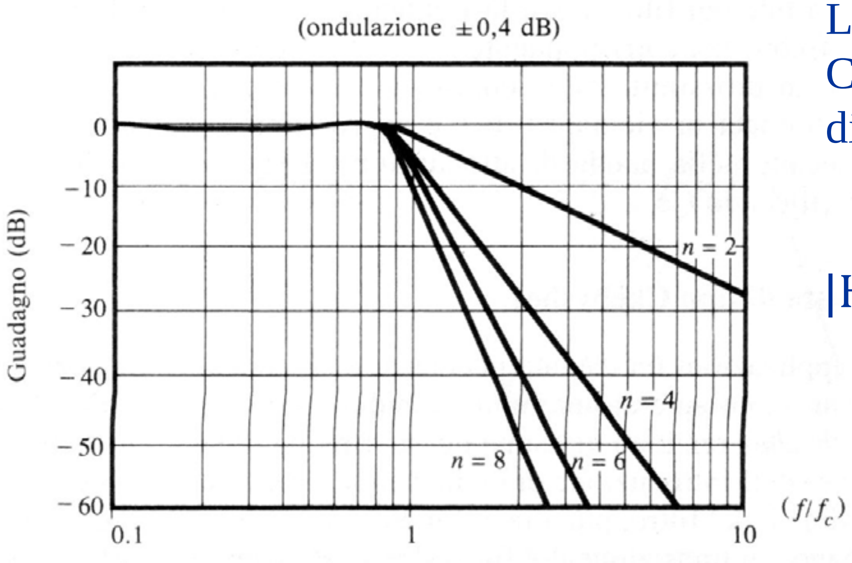
$$\Rightarrow\Rightarrow \quad \frac{1}{Q^2} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.707 \ \text{ e } \ f_{inc} = f_c$$

I polinomi di ordine superiore si possono ottenere considerandoli come prodotti di polinomi a 2 poli, ed uguagliando i coefficienti quando si impone l'uguaglianza dei moduli alla funzione di Butterworth.

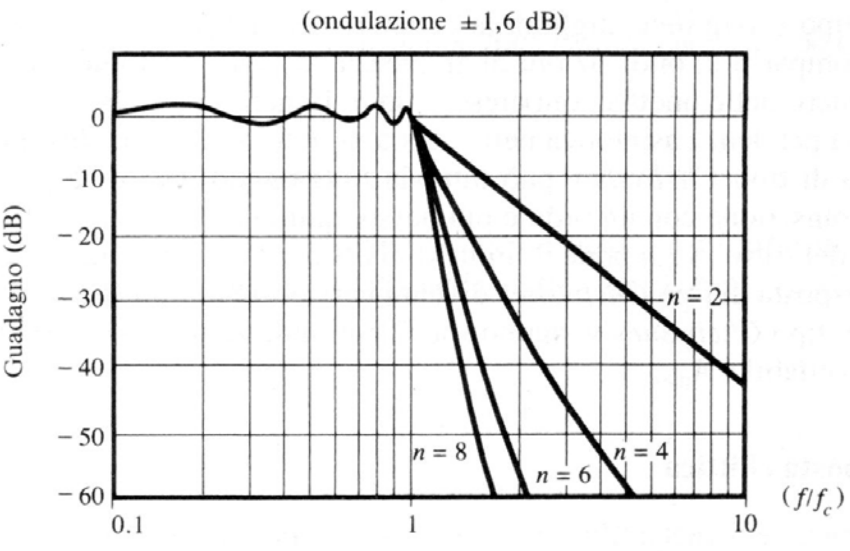
Pur di complicare le cose è possibile realizzare filtri a caratteristica ancora più tendente all'idealità.

Un esempio sono i filtri di Chebyshev.

Nei filtri di Chebyshev si ottiene un risultato più consono con il modulo della funzione di trasferimento pur di tollerare una certa "ondulazione" nella parte piatta. L'ampiezza dell'ondulazione si può modellare agendo sui coefficienti dei polinomi.



(a)



(b)

La forma della funzione di Chebyshev è più complicata di quella di Butterworth:

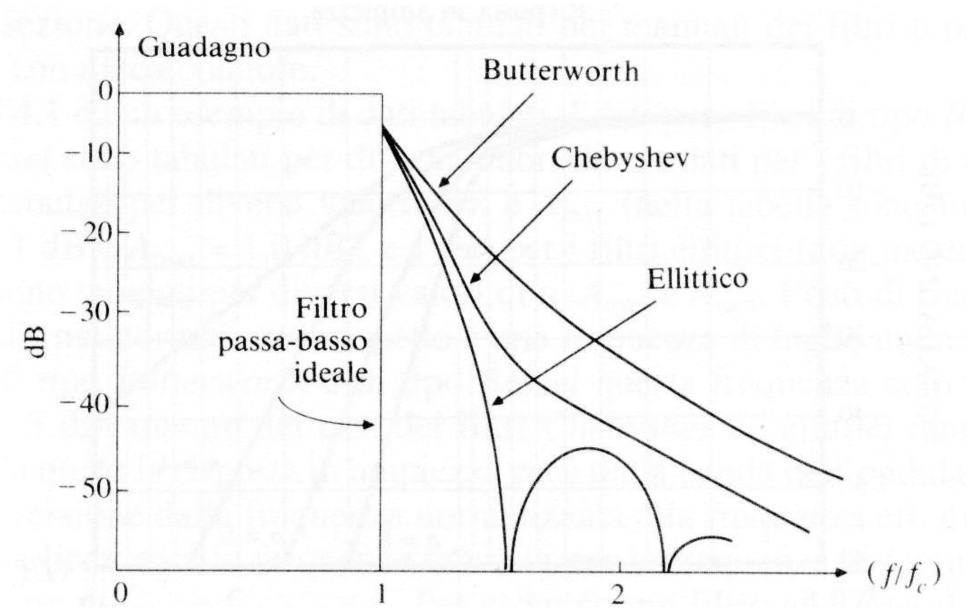
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(f/f_o)}}$$

Dove ε tiene conto della ondulazione sulla parte piatta, mentre C_n sono dei polinomi.

Anche i questo caso la funzione di trasferimento è rappresentabile con il prodotto di polinomi di II grado.

I coefficienti da usare nei polinomi sono forniti da tabelle.

Ci sono filtri ancora più rispondenti alle caratteristiche ideali. Questi sono i filtri ellittici. In più dei filtri di Chebyshev inseriscono un’ondulazione anche nella parte attenuata.



I 3 tipi di filtri visti presentano una buona attenuazione oltre la frequenza di taglio a -3 dB. Tuttavia sono inadeguati nel filtrare segnali che non siano sinusoidali, perché introducono delle distorsioni che possono essere fastidiose e deformanti.

Per questa ragione sono stati introdotti i filtri di Bessel o Thomson che, a scapito di una peggiore caratteristica della parte attenuata, sono in grado di distorcere in modo impercettibile il segnale.

Siccome il modulo della funzione di trasferimento dei filtri di Thomson è confrontabile a quella dei 3 filtri visti, abbiamo che fa la differenza di comportamento sta nella variabile che non abbiamo ancora considerato: la fase.

Associato alla progettazione della matematica dei filtri di Bessel ci sta il concetto di ritardo.

Una funzione di trasferimento che non ha effetti sulla manipolazione del segnale è data da un coefficiente moltiplicativo ed un termine di ritardo:

$$H(\omega) = Ke^{-j\omega t_o}$$

Abbiamo visto che l'applicazione di un segnale f(t) ad una tale funzione ci fornisce la funzione traslata, ma non modificata:

$$v_o(t) = Kf(t - t_o)$$

Sappiamo che una generica funzione di trasferimento possiamo esprimerla come:

$$T(\omega) = |T(\omega)|\, e^{-j\Phi(T(\omega))}$$

Parafrasando quanto visto sopra ci aspettiamo che se lo sfasamento di $T(\omega)$ fosse proporzionale alla frequenza il suo effetto sulla distorsione del segnale sarebbe minimo, al più lo traslerebbe nel tempo attenuandone magari alcune componenti in frequenza.

In genere la dipendenza dalla frequenza della fase è una funzione complicata. Però possiamo considerare la sua espansione intorno all'origine:

$$\Phi(T(\omega)) \approx a_o + a_1\omega + a_2\omega^2 + \cdots$$

Se vogliamo costruire una funzione con sfasamento proporzionale alla frequenza, o almeno il più possibile tale nella banda di interesse, dobbiamo ottimizzare:

$$\frac{d\Phi(T(\omega))}{d\omega} \approx a_1 + 2a_2\omega + \cdots$$

$$\frac{d\Phi(T(\omega))}{d\omega} \approx a_1 + 2a_2\omega + \cdots$$

Thomson ha fatto proprio così. $\Phi(T(\omega))$ sarà l'atn() di qualche cosa e vale che:

$$atn(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots$$

Supponiamo che il filtro sia a 2 poli:

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

Vale che:

$$\Phi(T(\omega)) = -atn\left(\frac{1}{a_o}\frac{a_1\omega_o}{1 - \omega^2/a_o}\right)$$

E quindi:

$$\Phi(T(\omega)) = -\frac{1}{a_o}\frac{a_1\omega_o}{1 - \omega^2/a_o} + \frac{1}{3a_o^3}\left(\frac{a_1\omega_o}{1 - \omega^2/a_o}\right)^3 - \ldots$$

Con un po' di espansione binomiale:

$$\Phi(T(\omega)) = -\frac{a_1}{a_o}\omega + \left(-\frac{a_1}{a_o^2} + \frac{a_1^3}{3a_o^3}\right)\omega^3 - \ldots$$

Ora, desiderando:

$$\Phi(T(\omega)) = -t_o\omega$$

Dovremo imporre che:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{a_o} = t_o \\ -\dfrac{a_1}{a_o^2} + \dfrac{a_1^3}{3a_o^3} = 0 \end{cases}$$

Cioè:

$$\begin{cases} a_o = \dfrac{3}{t_o^2} \\ a_1 = t_o a_o \end{cases}$$

Applicando lo stesso principio per un polinomio generico di grado n si ha:

$$a_k = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}k!\,(n-k)!} \qquad k = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1$$

E questi sono i coefficienti dei polinomi di Bessel.
Da questi coefficienti si può costruire una tabella che soddisfi le celle di circuito che vogliamo implementare. Come si vedrà più avanti.

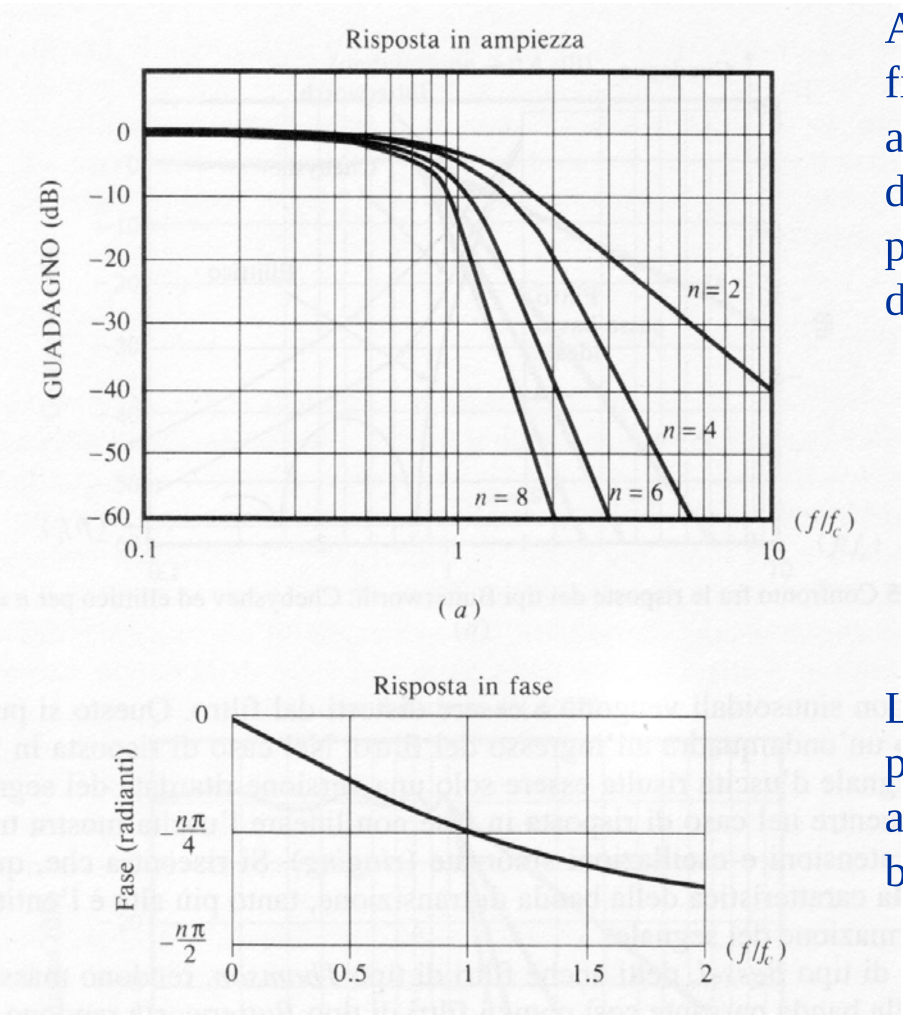
………. appendice E 11

$$\frac{d\Phi(T(\omega))}{d\omega} \approx a_1 + 2a_2\omega + \cdots$$

Perciò dobbiamo imporre che a_1 sia grande rispetto ad a_2, a_3,….

Questa è stata la filosofia di Thomson che ha cercato di realizzare una funzione simile alle precedenti, ma con in più la costrizione di avere una fase il più possibile lineare con la frequenza.

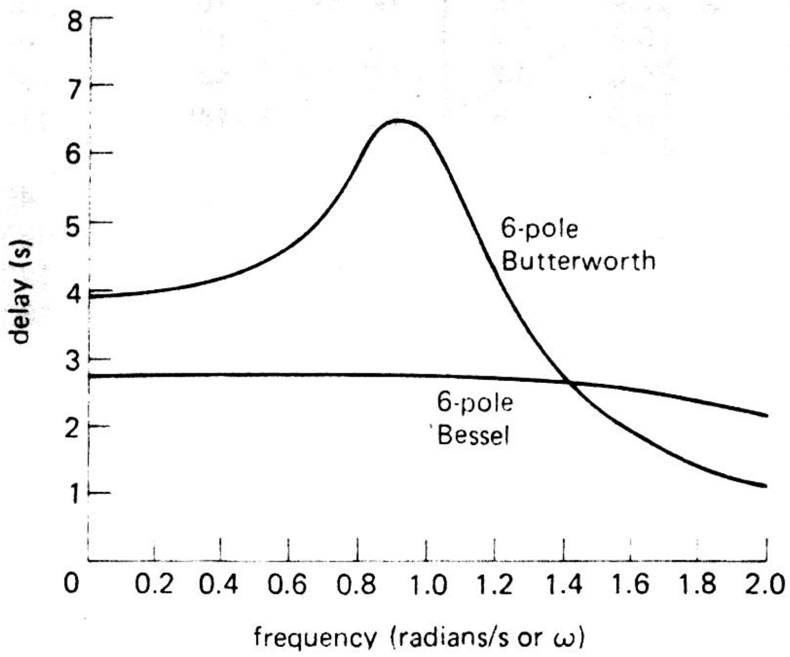
Il risultato è stato ottenuto sfruttando le funzioni di Bessel.



A differenza che nei 3 tipi di filtri precedenti la parte attenuata del filtro è più dolce. Però la parte piatta, precedente la frequenza a -3 dB è estremamente regolare.

La fase dei filtri di Bessel è praticamente proporzionale alla frequenza, almeno a basse frequenze.

Il confronto diretto tra il ritardo dei filtri di Bessel e di Butterworth è eloquente.



Il ritardo di un filtro di Chebyshev dà un'indicazione del fatto che l'ampiezza in questo tipo di filtri va a scapito della risposta.

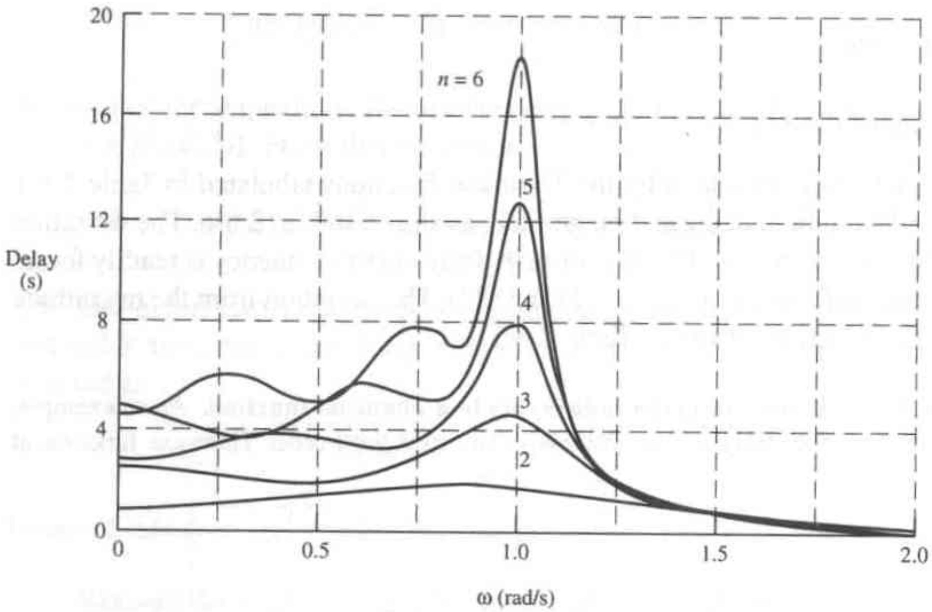


FIGURE 2.6-5
Delay of Chebyshev functions with 1-dB passband ripple.

La regolarità della fase si riflette direttamente nel comportamento nel dominio del tempo.

Il discostamento della fase dall'essere proporzionale alla frequenza porta ad una distorsione del segnale di uscita, se il segnale non è una sinusoide pura.

Tipico esempio significativo è la risposta del filtro al gradino.

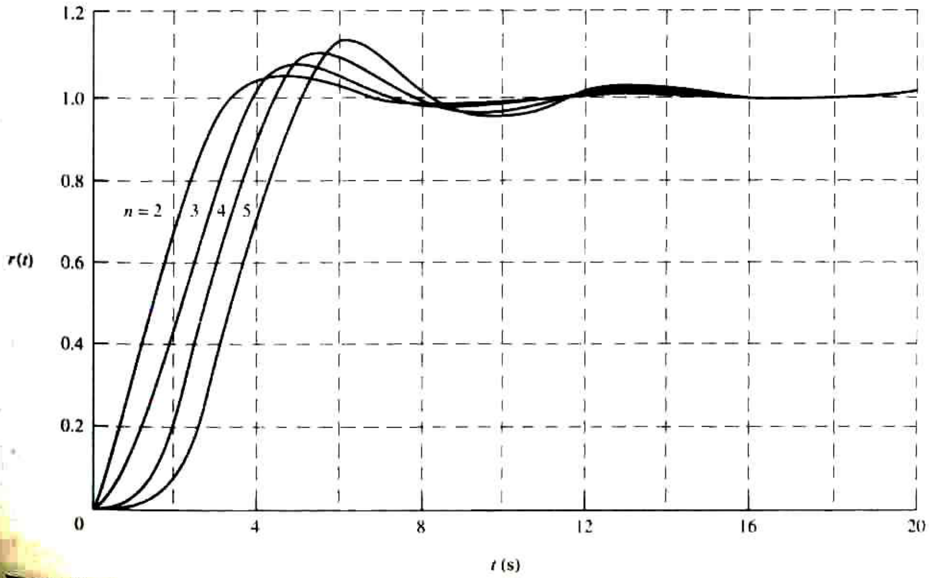


FIGURE 2.7-6
Step responses for Butterworth functions.

Abbiamo visto che nel filtro Chebyshev il ritardo si differenzia maggiormente che nel filtro Butterworth dall'essere costante.

A sua volta il filtro Butterworth non presenta un ritardo costante.

Il risultato è che nel filtro Chebyshev l'overshot ed il ringing nella risposta al gradino è più pronunciato che nel Butterworth.

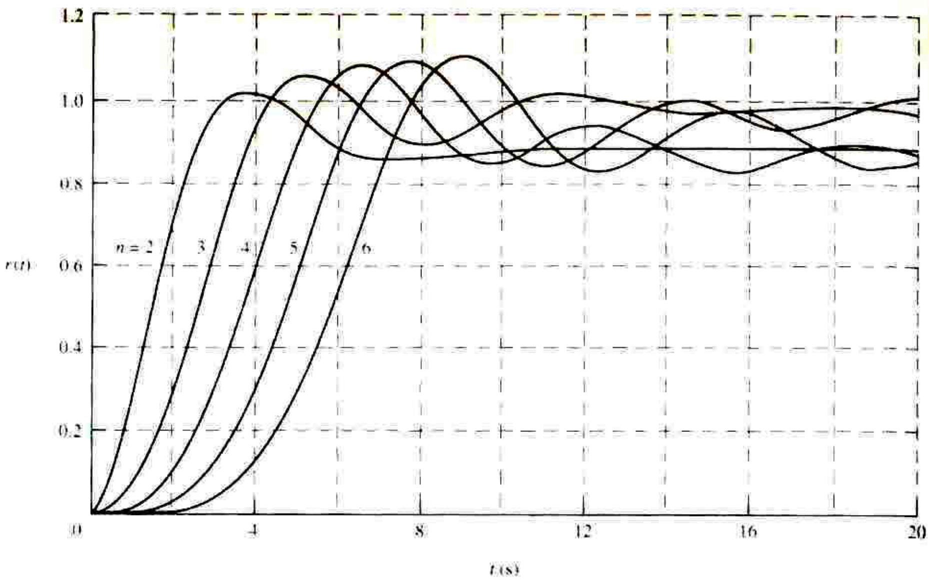


FIGURE 2.7-7
Step responses for 1-dB-ripple Chebyshev functions.

Il filtro Bessel presenta una risposta estremamente piatta all'eccitazione a gradino. La distorsione inserita al segnale è insignificante. Il risultato è la conseguenza diretta del mostrare un ritardo costante con la frequenza.

Nella risposta di Bessel il gradino appare come ritardato. Possiamo pensare al ritardo al punto dove il segnale è al 50 % del massimo.

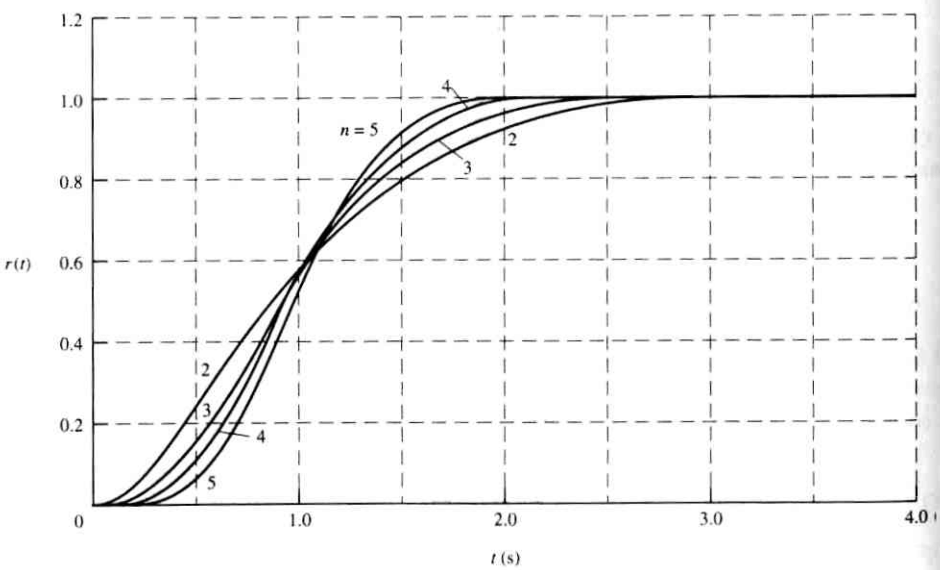
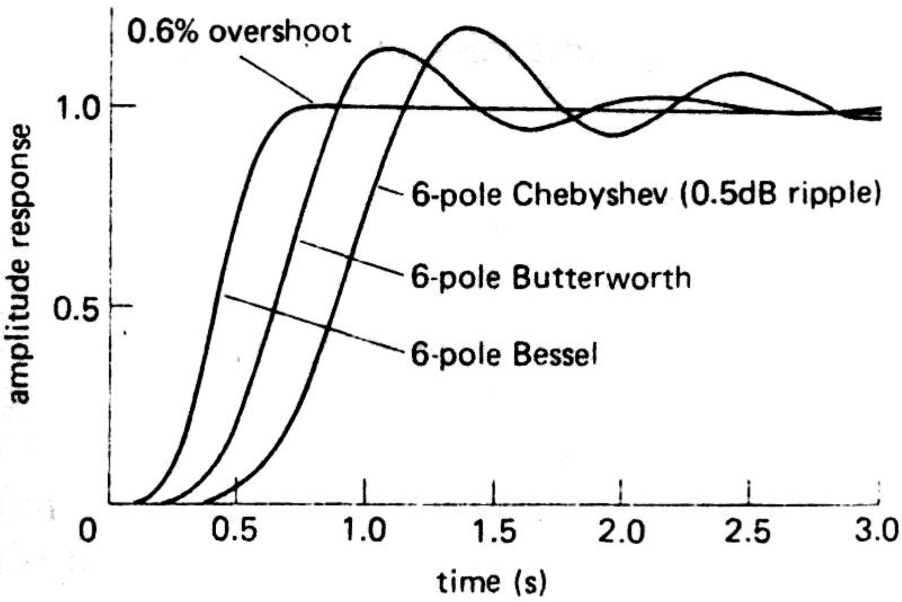


FIGURE 2.7-8
Step responses for Thomson functions.



Il confronto nella risposta al gradino dei 3 filtri mostra quanto sia più fedele alla forma del segnale di ingresso la risposta del filtro Bessel.

………. appendice E 15

Il modulo della funzione di trasferimento dei 3 filtri studiati mostra che la riposta che presenta meno distorsioni nel domino del tempo è accompagnata da una maggiore “dolcezza” nell’attenuazione oltre alla frequenza di taglio a -3 dB.

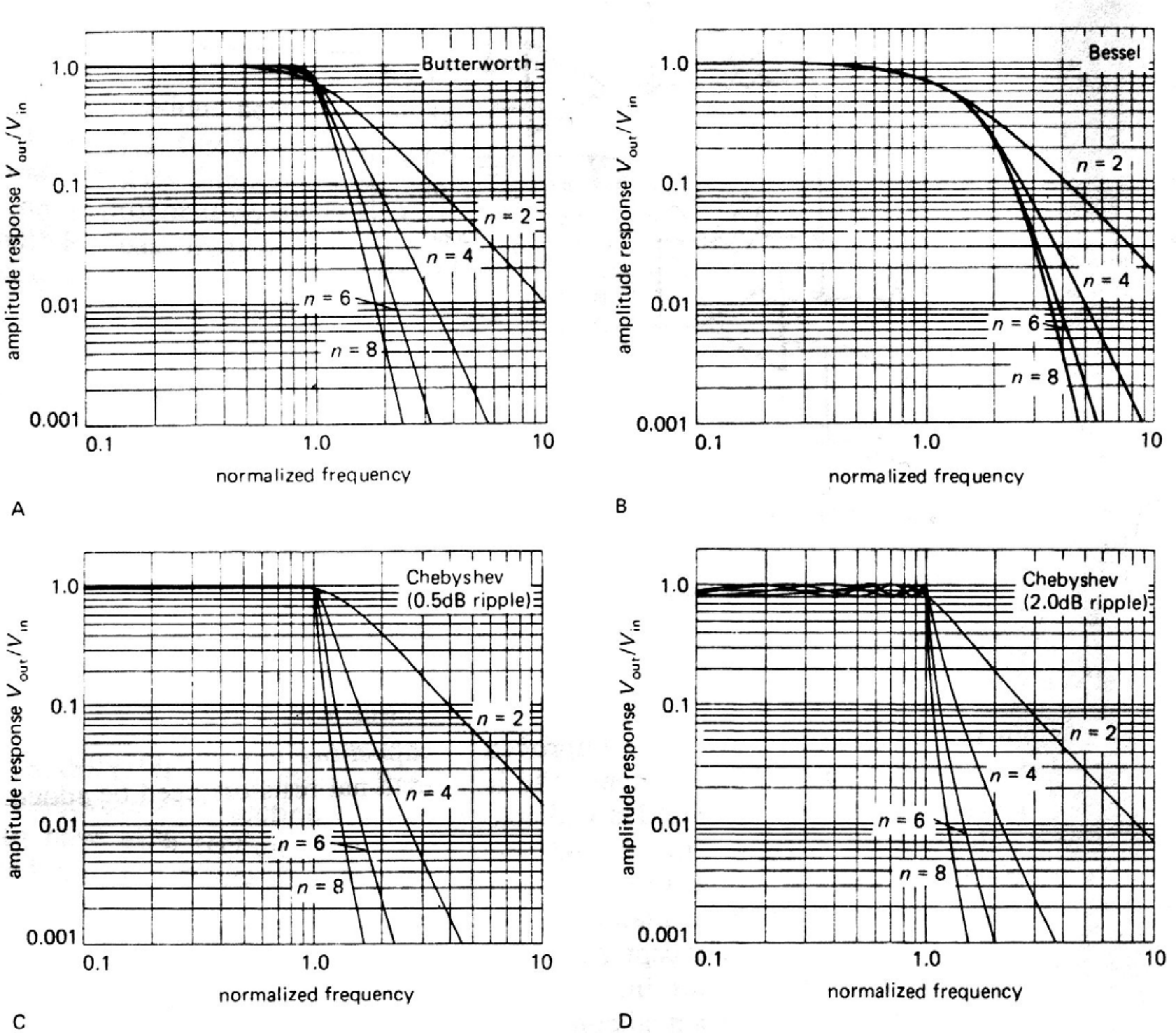
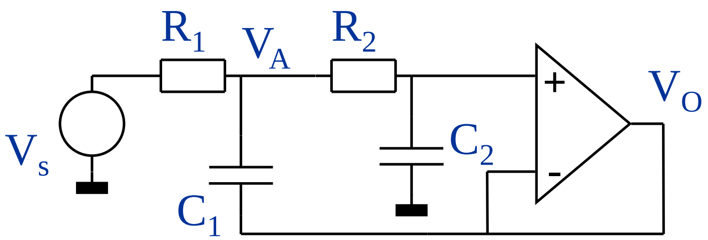


Figure 5.17. Normalized frequency response graphs for the 2-, 4-, 6-, and 8-pole filters in Table 5.2. The Butterworth and Bessel filters are normalized to 3dB attenuation at unit frequency, whereas the Chebyshev filters are normalized to 0.5dB and 2dB attenuations.

L'implementazione circuitale di un filtro attivo a 2n poli prevede la cascata di n reti a doppio polo. E' possibile implementare anche reti a 2n+1 poli. In questo caso il polo "dispari" viene implementato con una rete standard a singolo polo.

Esistono 2 soluzioni per l'implementazione della rete a doppio polo. Le 2 soluzioni sono una conseguenza dell'altra.

La rete originale è il così detto filtro di Sallen-Key



Le equazioni che governano la rete sono:

$$\begin{cases} \dfrac{V_s - V_A}{R_1} = (V_A - V_O)\, sC_1 + \dfrac{sC_2}{1 + sC_2R_2} V_A \\ V_O = \dfrac{V_A}{1 + sC_2R_2} \end{cases}$$

Risolvendo:

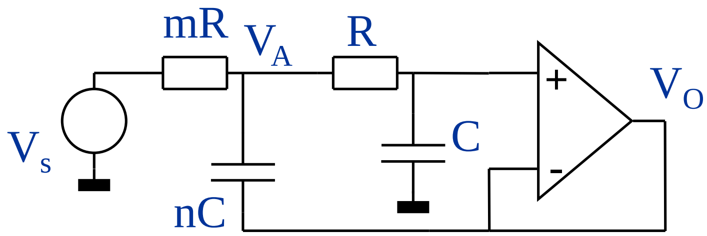
$$\begin{aligned} V_O &= \frac{1}{s^2C_1C_2R_1R_2 + s(R_1 + R_2)C_2 + 1} V_s \\ &= \frac{1}{1 + (s/\omega_o)^2 + \frac{1}{Q}(s/\omega_o)} V_s \end{aligned}$$

con:

$$\omega_o^2 = \frac{1}{C_1C_2R_1R_2}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{(R_1 + R_2)C_2}{\sqrt{C_1C_2R_1R_2}} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\sqrt{C_1C_2R_1R_2}}{(R_1 + R_2)C_2}$$

Nella forma più classica i parametri del filtro sono espressi come:



Da cui:

$$\omega_o = \frac{1}{CR\sqrt{nm}} \qquad Q = \frac{\sqrt{nm}}{(m+1)}$$

e

$$V_O = \frac{1}{s^2 nmR^2C^2 + s(m+1)RC + 1} V_s = \frac{1}{1 + (s/\omega_o)^2 + \frac{1}{Q}(s/\omega_o)} V_s$$

Di conseguenza scegliendo opportunamente n, m, R e C si può fare soddisfare alla funzione di trasferimento trovata i parametri opportuni per fare soddisfare le funzioni descritte.

Nei casi in cui Q risulta essere > 1 (vedi pagine successive) non è possibile fissare n ad 1.

………. appendice E 18

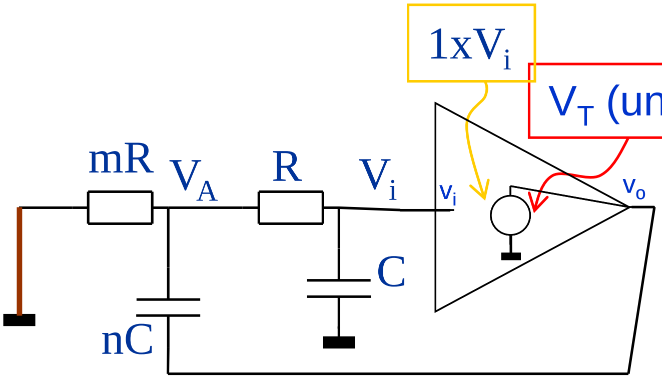
Vediamo la stabilità dell’anello. Assumiamo che la larghezza di banda dell’amplificatore sia maggiore di quella della frequenza del filtro che si intende realizzare, per semplicità.

Facciamo prima una considerazione. Il nostro guadagno di anello sappiamo essere del tipo:

$$A_f = \frac{1}{\beta(\omega)}\frac{-T(\omega)}{1 - T(\omega)}$$

Sappiamo che non si incorre problemi se T(ω) è negativa. D’altra parte, abbiamo che T(ω) è monotona decrescente. Da qui scende che se |T(ω)| <1 il denominatore non può annullarsi, qualsiasi sia arg(T(ω)).

Quindi assumiamo che l’amplificatore sia ideale ed abbia guadagno 1:



$$\begin{cases} (V_T - V_A)snC = \dfrac{V_A}{mR} + \dfrac{sC}{1 + sRC}V_A \\ V_i = \dfrac{V_A}{1 + sRC} \end{cases}$$

$$V_i = \frac{snCmR}{snCmR + 1 + (snCmR + 1 + m)sRC}V_T$$

E quindi, essendo il guadagno dell’amplificatore =1:

$$T = \frac{V_i}{V_T} = \frac{snCmR}{snCmR + 1 + (snCmR + 1 + m)sRC}$$

Da cui,

$$|T| = \left|\frac{snCmR}{snCmR + 1 + (snCmR + 1 + m)sRC}\right|$$

$$|T| = \left|\frac{snCmR}{snCmR + 1 + (snCmR + 1 + m)sRC}\right|$$

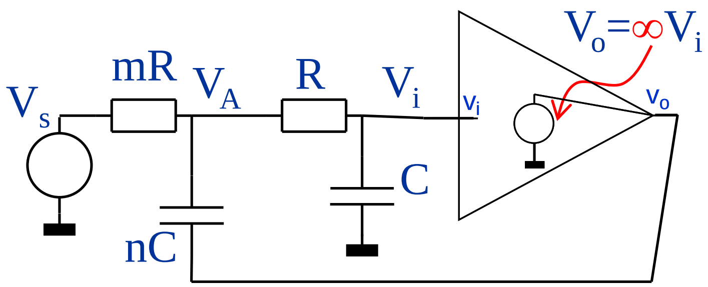
$$|T| = \frac{(\omega nmCR)}{|j\omega(nmCR + (1 + m)RC) + 1 - \omega^2 nmR^2C^2|}$$

$$|T|^2 = \frac{(\omega nmCR)^2}{[(nmCR + (1 + m)RC)\omega]^2 + [1 - nmR^2C^2]^2}$$

$$|T|^2 = \frac{(\omega nmCR)^2}{(\omega nmCR)^2\left[\left(1 + \frac{1 + m}{nm}\right)\right]^2 + [1 - nmR^2C^2]^2} < 1 \qquad \forall\omega, \text{ cvd!}$$

Perciò |T| risulta strettamente <1 per ogni valore di ω, cosa che garantisce la stabilità della rete.

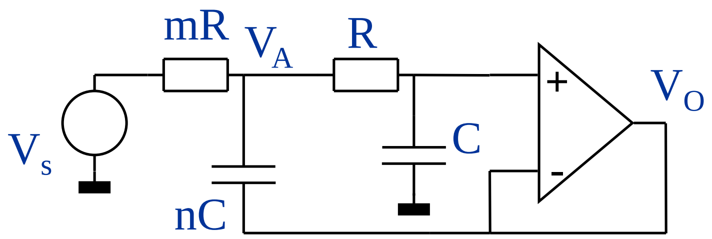
Ora, la cosa interessante è questa. Valutiamo il guadagno 1/β, ipotizzando A=∞:



Abbiamo che V_i=0 V, ma allora la corrente in R deve risultare nulla, perciò anche V_A=0 V.
Per cui:

$$\frac{V_s}{mR} = -V_o\, snC$$

$$V_o = -\frac{V_s}{snmCR}$$



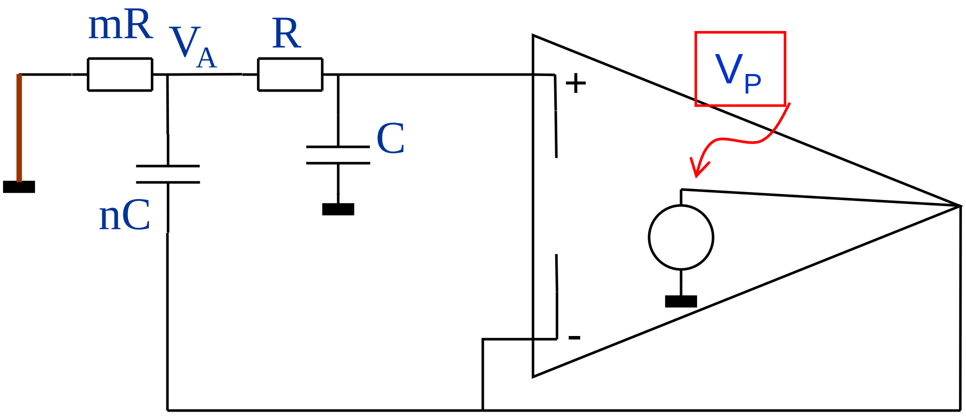
$$\left(T = \frac{snCmR}{snCmR + 1 + (snCmR + 1 + m)sRC}\right)$$

Considerando che la trasmissione diretta risulterebbe nulla, visto che abbiamo assunto per semplicità che l'impedenza di uscita dell'OA sia nulla, abbiamo che:

$$\begin{aligned}
V_o &= -\frac{1}{snmCR}\frac{-T}{1-T}V_s \\
&= -\frac{1}{snmCR}\,\frac{-snCmR}{snCmR + 1 + (snCmR + 1 + m)sRC}\frac{1}{1-T}V_s \\
&= \frac{1}{snCmR + 1 + (snCmR + 1 + m)sRC}\times \\
&\qquad\times\frac{snCmR + 1 + (snCmR + 1 + m)sRC}{snCmR + 1 + (snCmR + 1 + m)sRC - snCmR}V_s \\
&= \frac{1}{1 + (snCmR + 1 + m)sRC}V_s \\
&= \frac{1}{s^2nmR^2C^2 + s(1+m)RC + 1}V_s
\end{aligned}$$

Quest'ultimo risultato è esattamente uguale a quello ottenuto qualche pagina fa. Questo mostra che la tecnica usata nell'analisi delle reti reazionate vale sia che il guadagno T sia piccolo o grande, negativo o positivo.

Possiamo anche considerare il caso in cui l'amplificatore non sia ideale ed a guadagno unitario:



$$\begin{cases} (V_P - V_A)\, snC = \dfrac{V_A}{mR} + \dfrac{sC}{1 + sRC} V_A \\ V_+ = \dfrac{V_A}{1 + sRC} \\ V_- = V_P \end{cases}$$

Da cui, come nel caso precedente:

$$V_+ = \frac{snCmR}{snCmR + 1 + (snCmR + 1 + m)sRC} V_P$$

E quindi:

$$T = A\frac{V_+ - V_-}{V_P} = A\left(\frac{snCmR}{snCmR + 1 + (snCmR + 1 + m)sRC} - 1\right)$$
$$= -A\left(\frac{1 + (snCmR + 1 + m)sRC}{snCmR + 1 + (snCmR + 1 + m)sRC}\right)$$

$$T = -A\left(\frac{1 + (snCmR + 1 + m)sRC}{snCmR + 1 + (snCmR + 1 + m)sRC}\right)$$

$$T = -A\left(\frac{1 + (snmCR + 1 + m)sRC + snmCR - snmCR}{1 + (snmCR + 1 + m)sRC + snmCR}\right)$$

$$T = -A\left(1 - \frac{snmCR}{1 + (snmCR + 1 + m)sRC + snmCR}\right)$$

Ma:

$$1 - T = 1 + A - \frac{AsnmCR}{1 + (snmCR + 1 + m)sRC + snmCR}$$

$$1 - T \approx (1 + A)\left(1 - \frac{snmCR}{1 + (snmCR + 1 + m)sRC + snmCR}\right)$$

Ma la quantità dentro parentesi è sempre <1, come abbiamo dimostrato precedentemente.

In particolare in questo caso il termine $1/\beta$, considerando $V_+=V_-$ è esattamente uguale al risultato trovato qualche pagina fa:

$$V_O = \frac{1}{s^2nmR^2C^2 + s(m + 1)RC + 1}V_s$$

Introducendo il termine di correzione in T:

$$V_O = \frac{1}{s^2nmR^2C^2 + s(m + 1)RC + 1}\frac{-T}{1 - T}V_s$$

$$T = -A\left(\frac{1+(snCmR+1+m)sRC}{snCmR+1+(snCmR+1+m)sRC}\right)$$

$$1-T \approx (1+A)\left(1-\frac{snmCR}{1+(snmCR+1+m)sRC+snmCR}\right)$$

Ovvero:

$$V_O = \frac{1}{s^2nmR^2C^2+s(m+1)RC+1}\frac{-T}{1-T}V_s$$

$$= \frac{1}{s^2nmR^2C^2+s(m+1)RC+1}\frac{A(1+(snCmR+1+m)sRC)}{snCmR+1+(snCmR+1+m)sRC}\times$$

$$\times\frac{1}{(1+A)\left(1-\frac{snmCR}{1+(snmCR+1+m)sRC+snmCR}\right)}V_s$$

$$\approx \frac{1}{s^2nmR^2C^2+s(m+1)RC+1}\times$$

$$\times\frac{1+(snCmR+1+m)sRC}{1+(snmCR+1+m)sRC+snmCR-snmCR}V_s$$

$$= \frac{1}{s^2nmR^2C^2+s(m+1)RC+1}V_s$$

Cioè ancora il risultato calcolato in precedenza.

Tabella 4.1 – Esempi di tabelle dei filtri passa-basso

Filtro di tipo Butterworth passa-basso

n	f_{01}	Q_1	f_{02}	Q_2	f_{03}	Q_3	f_{04}	Q_4	f_{05}	Q_5	Att. a $2f_c$
2	1	0,707									15
3	1	1,000	1								21
4	1	0,541	1	1,306							27
5	1	0,618	1	1,620	1						33
6	1	0,518	1	0,707	1	1,932					39
7	1	0,555	1	0,802	1	2,247	1				45
8	1	0,510	1	0,601	1	0,900	1	2,563			51
9	1	0,532	1	0,653	1	1,000	1	2,879	1		57
10	1	0,506	1	0,561	1	0,707	1	1,101	1	3,196	63

Filtro di tipo Bessel passa-basso

n	f_{01}	Q_1	f_{02}	Q_2	f_{03}	Q_3	f_{04}	Q_4	f_{05}	Q_5
2	1,274	0,577								
3	1,453	0,691	1,327							
4	1,419	0,522	1,0591	0,806						
5	1,561	0,564	1,760	0,917	1,507					
6	1,606	0,510	1,691	0,611	1,907	1,023				
7	1,719	0,533	1,824	0,661	0,051	1,127	1,685			
8	1,784	0,506	1,838	0,560	1,958	0,711	2,196	1,226		
9	1,880	0,520	1,949	0,589	2,081	0,760	2,324	1,322	1,858	
10	1,949	0,504	1,987	0,538	2,068	0,620	2,211	0,810	2,485	1,415

Per ogni scelta nel numero di poli ogni polinomio di II grado deve soddisfare i coefficienti indicati. Se il numero di poli fosse dispari occorrerebbe aggiungere un filtro ad un polo, anch'esso con i coefficienti dati. Nel filtro Bessel alla frequenza da imporre ad ω_o è: $\omega_o=2\pi f_o f_c$ se f_c è la effettiva frequenza di taglio che si intende conseguire. Questa è la conseguenza dell'adattamento dei coefficienti di Bessel alle celle.

Tabella 4.1 (segue) – Esempi di tabelle dei filtri passa-basso

Filtro di tipo Chebyshev passa-basso con 0,1 dB di ondulazione

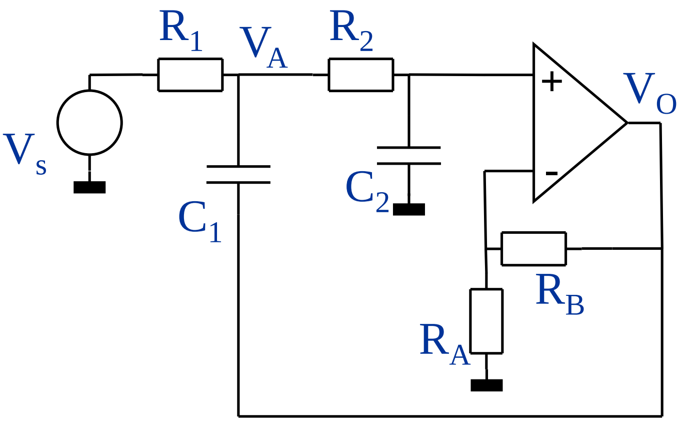
n	f_{01}	Q_1	f_{02}	Q_2	f_{03}	Q_3	f_{04}	Q_4	f_{05}	Q_5	Att. a $2f_c$
2	1,820	0,767									3,31
3	1,300	1,341	0,969								12,24
4	1,153	2,183	0,789	0,619							23,43
5	1,093	3,282	0,797	0,915	0,539						34,85
6	1,063	4,633	0,834	1,332	0,513	0,599					46,29
7	1,045	6,233	0,868	1,847	0,575	0,846	0,377				57,72
8	1,034	8,082	0,894	2,453	0,645	1,183	0,382	0,593			69,16
9	1,027	10,178	0,913	3,145	0,705	1,585	0,449	0,822	0,290		80,60
10	1,022	12,522	0,928	3,921	0,754	2,044	0,524	1,127	0,304	0,590	92,04

Filtro di tipo Chebyshev passa-basso con 1,00 dB di ondulazione

n	f_{01}	Q_1	f_{02}	Q_2	f_{03}	Q_3	f_{04}	Q_4	f_{05}	Q_5	Att . a $2f_c$
2	1,050	0,957									11,36
3	0,997	2,018	0,494								22,46
4	0,993	3,559	0,529	0,785							33,87
5	0,994	5,556	0,655	1,399	0,289						45,31
6	0,995	8,004	0,747	2,198	0,353	0,761					56,74
7	0,996	10,899	0,808	3,156	0,480	1,297	0,205				68,18
8	0,997	14,240	0,851	4,266	0,584	1,956	0,265	0,753			79,62
9	0,998	18,029	0,881	5,527	0,662	2,713	0,377	1,260	0,159		91,06
10	0,988	22,263	0,902	6,937	0,721	3,561	0,476	1,864	0,212	0,749	102,50

Anche per i polinomi di Chebyshev i filtri devono avere i parametri impostati in modo opportuno. I parametri sono differenti a seconda che l’ondulazione possa essere 0.1 dB o 1 dB.

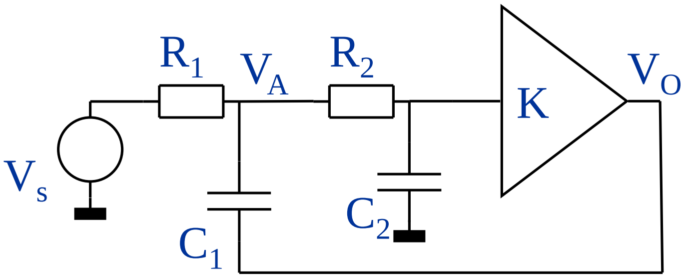
Una seconda soluzione, che aggiunge più libertà di scelta, l'abbiamo se consentiamo all'amplificatore di avere un guadagno > 1:



Ora il guadagno dell'amplificatore è:

$$K = \frac{R_A + R_B}{R_A}$$

Il circuito equivalente diviene:



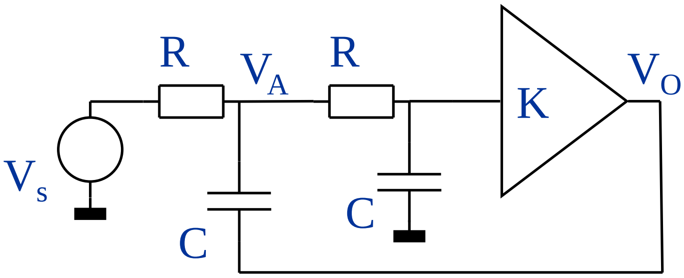
La rete si risolve a partire da:

$$\begin{cases} \dfrac{V_s - V_A}{R_1} = sC_1(V_A - V_O) + \dfrac{sC_2}{1 + sC_2R_2} V_A \\ V_O = K \dfrac{V_A}{1 + sC_2R_2} \end{cases}$$

La soluzione del sistema fornisce:

$$V_O = \frac{K}{s^2C_1C_2R_1R_2 + s[(R_1+R_2)C_2 + (1-K)R_1C_1] + 1} V_s$$

In questo caso abbiamo una sorta di grado di libertà in più. Di solito si sfrutta questa opportunità ponendo: $R_1=R_2=R$ e $C_1=C_2=C$:



$$V_O = \frac{K}{s^2C^2R^2 + s(3-K)RC + 1} V_s$$
$$= \frac{K}{1 + (s/\omega_o)^2 + \frac{1}{Q}(s/\omega_o)} V_s$$

Dove:

$$\omega_o = \frac{1}{CR}$$
$$\frac{1}{Q} = 3 - K \;\Rightarrow\; Q = \frac{1}{3-k} \;\Rightarrow\; K = 3 - \frac{1}{Q}$$

Nei filtri di Butterworth, Thomson e Chebyshev Q è sempre > 1/3.

Pertanto questa configurazione si adatta a detti filtri ed a qualsiasi scelta del numero di poli.

In particolare risulta sempre che K < 3.

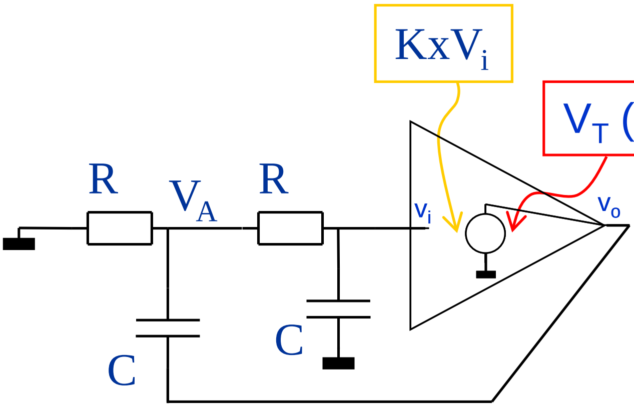
Osservazione: per tutti i tipi di filtro visti scambiando di posto le resistenze con le capacità e considerando il reciproco del coefficiente della frequenza delle tabelle si ottengono filtri passa alto.

Per ottenere un Q adeguato alla realizzazione dei filtri attivi si è reso necessario aggiungere una piccola reazione positiva al sistema. Infatti se si andasse a verificare, i filtri considerati hanno poli complessi e coniugati.

Di principio, la piccola reazione positiva potrebbe portare instabilità.

Sappiamo però che se T è < 1 a partire da una frequenza ben < di 180° non vi sono problemi.

Per verificarlo, studiamo il guadagno di anello supponendo l'amplificatore ideale, nell'ipotesi semplificava che siano uguali le resistenze e le capacità:



$$\begin{cases} (V_T - V_A)sC = \dfrac{V_A}{R} + \dfrac{sC}{1+sCR}V_A \\ V_{RET} = \dfrac{K}{1+sCR}V_A \end{cases}$$

Risolvendo si ricava:

$$T = \frac{V_{RET}}{V_T} = \frac{sCRK}{1-(\omega/\omega_o)^2 + 3\,s/\omega_o}$$

Va da se che vale:

$$A_f = \frac{A_{RE}}{1-T}$$

Visto che la reazione è positiva deve essere garantito che $|T|<1 \;\; \forall\omega$:

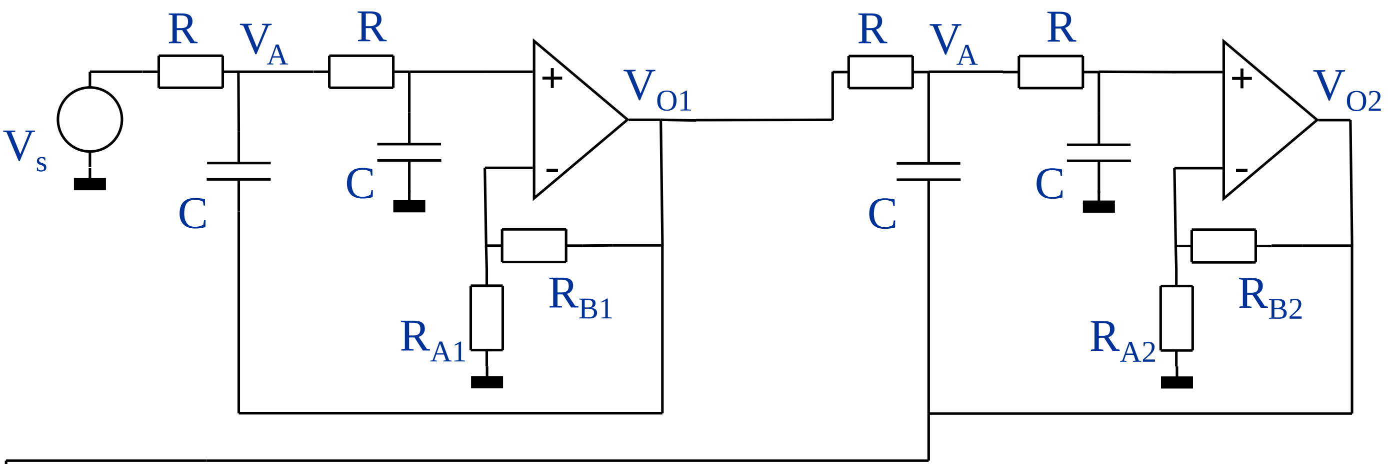
$$|T|^2 = \frac{(\omega/\omega_o)^2K^2}{[1-(\omega/\omega_o)^2]^2 + 9(\omega/\omega_o)^2} \overset{K<3}{<} \frac{(\omega/\omega_o)^2 9}{[1-(\omega/\omega_o)^2]^2 + 9(\omega/\omega_o)^2} < 1 \quad \forall\omega$$

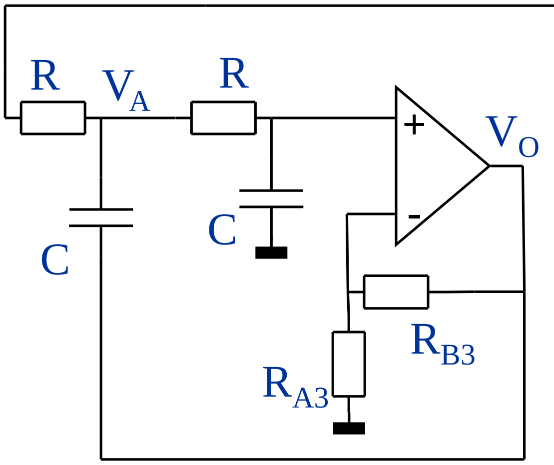
Esempio: filtro Butterworth a 6 poli con frequenza di taglio f_o=1 kHz.

Tabella 4.1 – Esempi di tabelle dei

Filtro di tipo Butterworth pass

n	f_{01}	Q_1	f_{02}	Q_2	f_{03}	Q_3
2	1	0,707				
3	1	1,000	1			
4	1	0,541	1	1,306		
5	1	0,618	1	1,620	1	
6	1	0,518	1	0,707	1	1,932
7	1	0,555	1	0,802	1	2,247





Ognuno delle 3 celle deve soddisfare:

$$\omega_o = \frac{1}{CR} \qquad K = 3 - \frac{1}{Q}$$

Scegliendo per tutte C=100 nF abbiamo che:

$$R = \frac{1}{2\pi f_o 100\,\text{nF}} = 1592\,\Omega$$

Poi, dalla tabella: K_1=1.0695, K_2=1.5856 e K_3=2.4824. Quindi, per esempio, scegliendo $R_{A1}=R_{A2}=R_{A3}$=1 K Ω:

$$K = \frac{R_A + R_B}{R_A} = 1 + \frac{R_B}{R_A} \Rightarrow R_B = R_A(K-1)$$

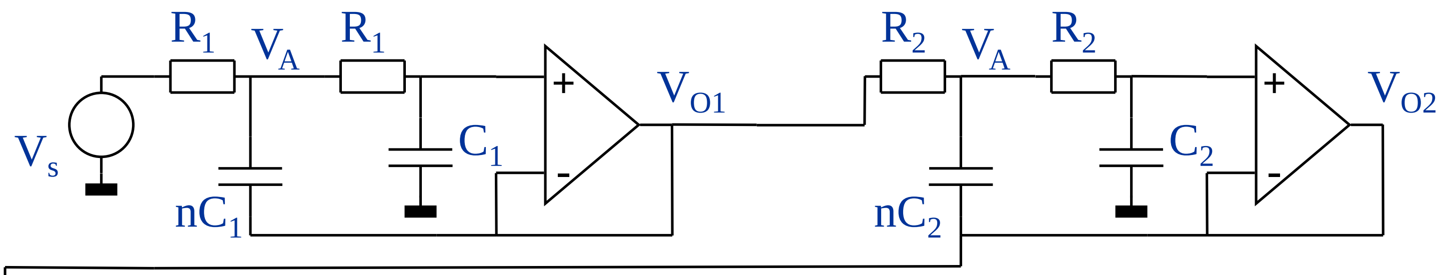
è: R_{B1}=695 Ω, R_{B2}=585 Ω, e R_{B3}=1482 Ω

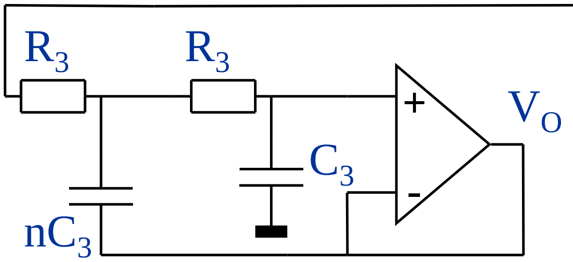
Ora filtro di Thomson a 6 poli a frequenza di taglio f_o= 1 KHz

Filtro di tipo Bessel passa-b

n	f_{01}	Q_1	f_{02}	Q_2	f_{03}	Q_3
2	1,274	0,577				
3	1,453	0,691	1,327			
4	1,419	0,522	1,0591	0,806		
5	1,561	0,564	1,760	0,917	1,507	
6	1,606	0,510	1,691	0,611	1,907	1,023

Volendo soddisfare la condizione sulla fase abbiamo un parametro in più per ogni cella. Cerchiamo di soddisfare i coefficienti con celle a guadagno unitario.





Ora facciamo in modo che in ognuna delle celle le resistenze siamo uguali (m=1) e le capacità siano diverse (n≠1). Quindi risulta che:

$$Q = \frac{\sqrt{nm}}{(m+1)} \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{n}}{2} \quad \text{quindi} \quad n = 4Q^2$$

Selezionate le 2 capacità sarà: $$R = \frac{1}{2\pi f_o f_{0i} C\sqrt{n}}$$

Attenzione al vincolo: in ogni cella la frequenza da considerare non è f_o ma f_o moltiplicata per il coefficiente f_{oi} dato dalla tabella.

………. appendice E 31

Filtro di tipo Bessel passa-b

n	f_{01}	Q_1	f_{02}	Q_2	f_{03}	Q_3
2	1,274	0,577				
3	1,453	0,691	1,327			
4	1,419	0,522	1,0591	0,806		
5	1,561	0,564	1,760	0,917	1,507	
6	1,606	0,510	1,691	0,611	1,907	1,023

$$n = 4Q^2 \qquad R = \frac{1}{2\pi f_o f_{0i} C\sqrt{n}}$$

Per cui, se C_1=C_2=C_3= 1 nF otteniamo che: nC_1=1.04 nF, nC_2=1.4932 nF e nC_3=4.186 nF.

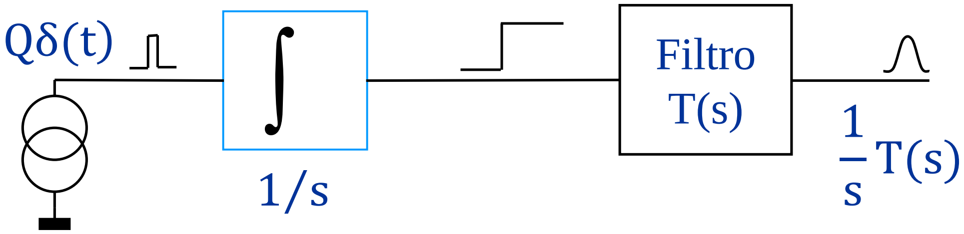
R_1=95300 Ω, R_2= 63060 Ω e R_3=19947 Ω

APPENDICE F 1

Un secondo tipo di applicazione, di cui esempio più evidente è la trattazione del segnale proveniente da un rivelatore di particelle, si ha quando il segnale ha forma predeterminata, la cui ampiezza è l'unica variabile in gioco.

Il segnale viene sagomato in modo che la forma finale abbia caratteristiche che soddisfino esigenze di rumore, di frequenza di ripetizione etc.

La tipica catena di acquisizione analogica di un segnale proveniente da un rivelatore nucleare standard segue le seguente fasi:



La particella incidente genera un segnale molto veloce, approssimabile ad una $\delta(t)$.

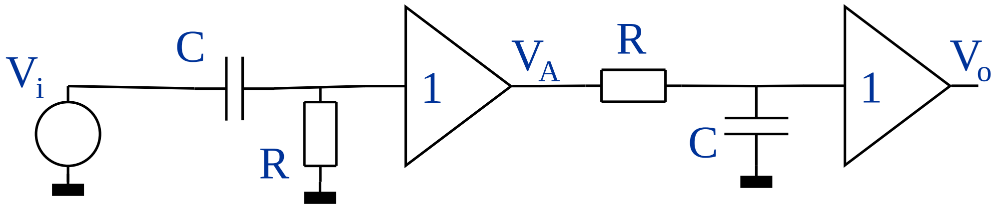
Il segnale viene integrato ed amplificato. Quindi filtrato per ottimizzare il rapporto Segnale/Rumore, S/N.

Vediamo come si possa realizzare un filtro.

Un secondo tipo di applicazione, di cui esempio più evidente è la trattazione del segnale proveniente da un rivelatore di particelle, si ha quando il segnale ha forma predeterminata, la cui ampiezza è l'unica variabile in gioco.

Il segnale viene sagomato in modo che la forma finale abbia caratteristiche che soddisfino esigenze di rumore, di frequenza di ripetizione etc.

La formatura più classica e semplice è la così detta CR-RC:



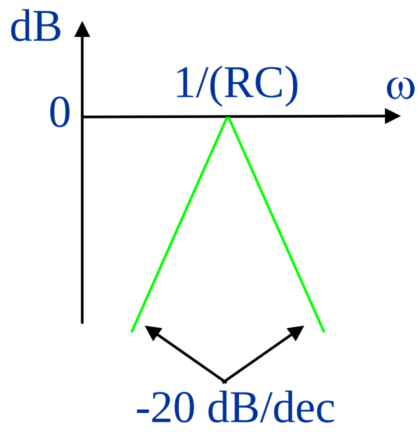
$$V_o = \frac{s\tau}{(1+s\tau)^2} V_i$$

Il modulo della funzione ha massimo per ω=1/τ dove troviamo i 2 poli:

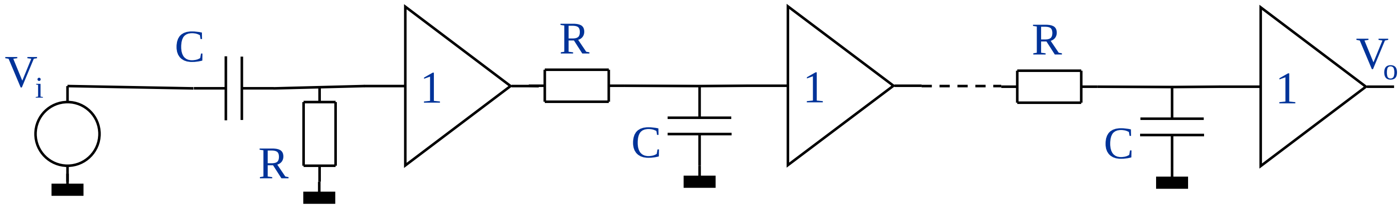
$$\left|\frac{V_o}{V_i}\right|_{\omega=1/\tau} = 0.5 = -6 \ \text{dB}$$

Le 2 frequenze che stanno -3 dB sotto il punto di massimo sono:

$$\frac{\omega\tau}{(1+\omega^2\tau^2)} = 0.35 \Rightarrow \omega_{1,2} = \begin{cases} \dfrac{2.45}{\tau} \\[2ex] \dfrac{0.41}{\tau} \end{cases}$$



La formatura più generica si ha ponendo in cascata un filtro CR e n filtri RC, generando un rete detta CR-RC^n:



$$V_o = \frac{s\tau}{(1+s\tau)^{n+1}} V_i = T(s)\, V_i$$

Nel processo di amplificazione di un segnale proveniente da un rivelatore, il segnale tipicamente impulsivo viene quasi-integrato prima di essere posto all'ingresso del filtro. Di conseguenza è di interesse studiare la risposta del filtro ad una eccitazione a gradino:

$$V_i(t) = V_{io} 1(t) \quad \Rightarrow \quad V_o = \frac{1}{\tau^n} \frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)^{n+1}} V_{io}$$

L'anti-trasformata nel dominio del tempo è un'applicazione della proprietà già vista della derivata:

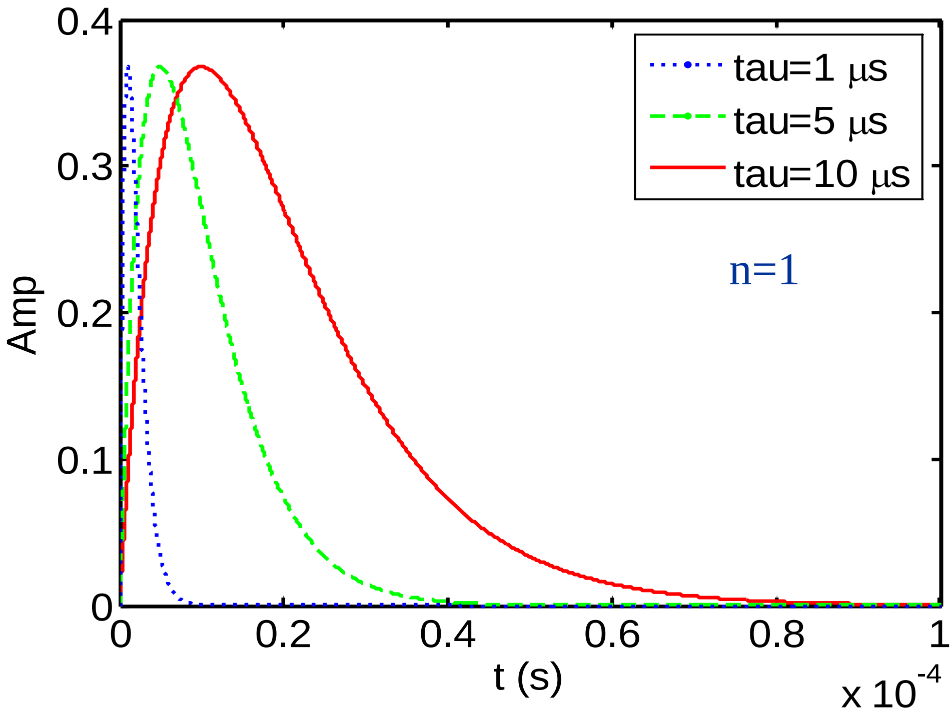
$$V_o(t) = \frac{1}{n!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^n \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) 1(t) V_{io}$$

Derivando $V_o(t)$ si ottiene che il massimo della funzione si trova per:

$$t_{max} = n\tau$$

dove: $$V_o(t_{max}) = \frac{1}{n!} n^n \exp(-n) V_{io}$$

Per esempio per n=1 è: $$V_o(t_{max}) = \frac{1}{e} V_{io} = 0.37 V_{io}$$



Per qualsiasi valore di n, l'area di ognuna delle curve risulta:

$$\int_0^\infty V_o(t) \quad dt = \tau V_{io}$$

Siccome a V_{OMAX} si ha t=nτ, il risultato ottenuto implica che all'aumentare di n si abbassa l'ampiezza del segnale, e si allarga la sua estensione temporale.

Si supponga di dovere sostenere un frequenza media di conteggi pari a λ conteggi al secondo (λ essendo governato dalla statistica di Poisson).

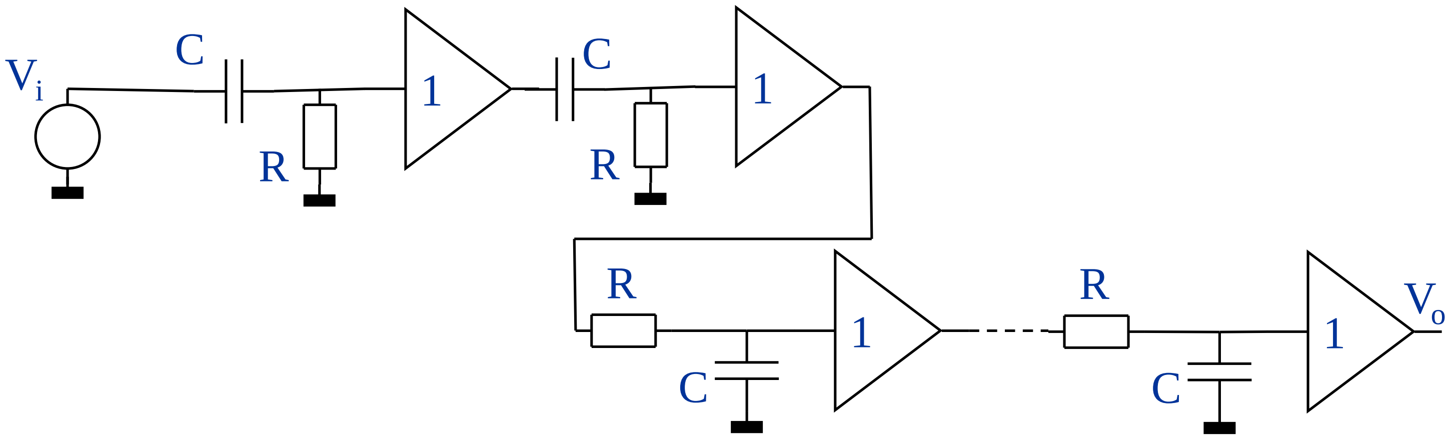
Il valore medio risultante sarà:

$$\overline{V}_o = \lambda \int_0^\infty V_o(t) \quad dt = \lambda\tau V_{io}$$

La linea di base del segnale si sposta della quantità λτ quando si illumina il rivelatore con la sorgente. Se λ è elevato si è quindi costretti ad impiegare tempi di formatura τ piccoli, oppure ad usare una formatura che abbia valore medio nullo.

L'effetto del discostamento della linea di base è deleterio giacché l'ampiezza del picco del segnale risente dal valore di partenza.

Un tipo di formatura che consente di evitare il problema dello spostamento della linea di base si ottiene aggiungendo una differenziazione alla formatura CR-RC^n, ottenendo la formatura CR^2-RC^n, o bipolare:



La funzione di trasferimento è:
$$V_o = \frac{s^2\tau^2}{(1+s\tau)^{n+2}} V_i$$

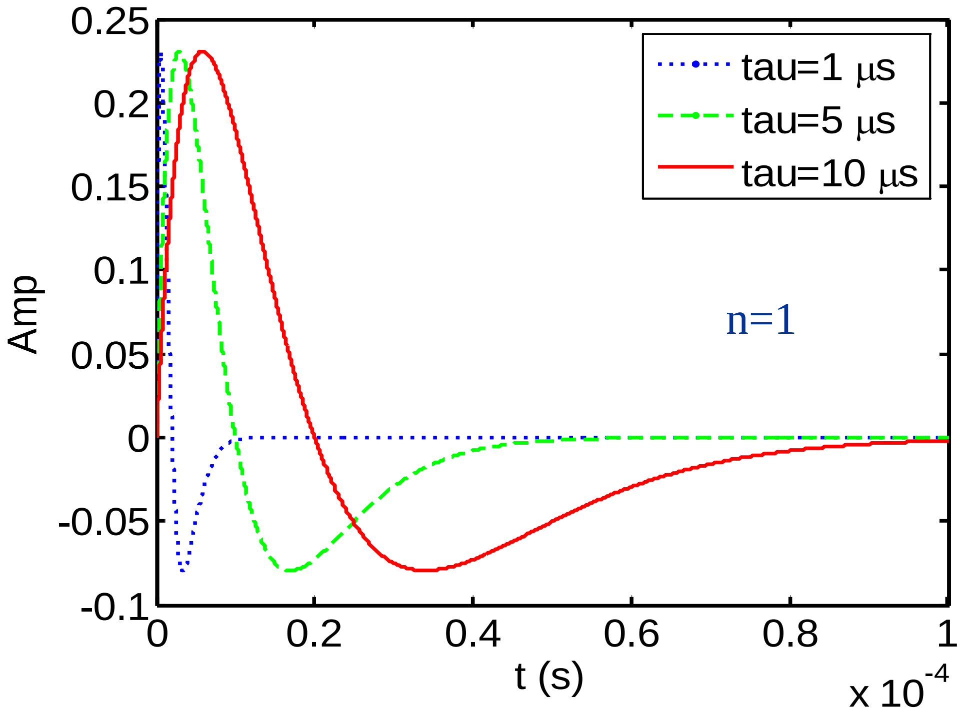
Mentre la risposta alla 1(t):
$$V_o = \tau s \frac{1}{\tau^{n+1}} \frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)^{n+2}} V_{io}$$

Perciò:
$$V_o(t) = \tau \frac{d}{dt} L^{-1}\left(\frac{1}{\tau^{n+1}} \frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)^{n+2}} V_{io} \right)$$

$$V_o(t) = \tau \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{(n+1)} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) 1(t) \right)$$
$$= \left\{ \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{n} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{n+1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right\} V_{io} 1(t)$$

Per quanto visto nella pagina precedente l'integrale di $V_o(t)$ è nulla visto che i 2 termini che la compongono hanno lo stesso integrale, a parte il segno.

La funzione ottenuta è la differenza tra 2 funzioni aventi lo stesso integrale. Perciò ora, come era da aspettarsi, la linea di base non viene inficiata dal tasso di conteggi.



La funzione ottenuta ha una massimo ed un minimo agli istanti:

$$t_{max.min} = \tau\, n(n+1)\left[\frac{1}{n} \pm \sqrt{\frac{1}{n^2(n+1)}}\right]$$

ad esempio, per n=1, formatura CR^2-RC è:

$$t_{max.min} = 2\tau\left[1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Nella formatura CR_RC^n si può fare una ulteriore considerazione. Ci si può chiedere se potrebbe essere considerata simile ad una formatura puramente gaussiana sotto qualche limite o ipotesi.

La formatura gaussiana essendo molto regolare è una delle più ambite, difficile però da implementare in pratica.

Consideriamo la formatura:

$$f(t - \text{ritardo}) = e^{-\frac{(t-\text{ritardo})^2}{2\tau_o^2}}$$

Vale a dire un segnale gaussiano traslato.

La sua trasformata di fourrier risulta:

$$F(s) = \tau_o\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\tau_o^2}{2}\omega^2} e^{-j\omega\,\text{ritardo}}$$

Supponiamo che per qualche n la formatura CR-RC^n approssimi f(t), quindi F(s). Nel dominio delle frequenze questo deve verificarsi per modulo e fase:

Da: $FF(s) = \frac{1}{s}\frac{s\alpha\tau}{(s\tau + 1)^{n+1}}$ FF(s)= risposta del filtro al segnale del preamplificatore.

Ci aspettiamo che:

$$|FF(s)| \approx |F(s)| \quad \text{e} \quad \arg\big(FF(s)\big) \approx \arg\big(F(s)\big)$$

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MILANO BICOCCA

Supposto che $\alpha\tau=\tau\sqrt{(2\pi)}$, abbiamo da dimostrare che:

$$\left((\omega\tau)^2+1\right)^{n+1} \approx e^{\omega^2\tau_o^2}$$

Consideriamo il limite:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = [1]^\infty \quad \text{indecisione}$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \lim_{m\to\infty}\exp\left[\frac{\ln\left(1+\frac{x}{m}\right)}{1/m}\right] = \exp\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{m\to\infty}\exp\left[\frac{\ln\left(1+\frac{x}{m}\right)}{1/m}\right] = \lim_{m\to\infty}\exp\left[\frac{1}{\left(1+\frac{x}{m}\right)}\frac{-x/m^2}{-1/m^2}\right] \to e^x$$

Scegliendo: $\tau=\tau_o/\sqrt{n}$:

$$\left((\omega\tau)^2+1\right)^{n+1} = \left(\frac{(\omega\tau_o)^2}{n}+1\right)^{n+1} \xrightarrow[\text{n grande}]{} e^{\omega^2\tau_o{}^2}$$

Perciò una candidata all'approssimazione gaussiana è:

$$FF(s) = \frac{\alpha\,\tau_o/\sqrt{n}}{(s\,\tau_o/\sqrt{n}+1)^{n+1}}$$

Vediamo l'argomento che ora dovrà soddisfare:

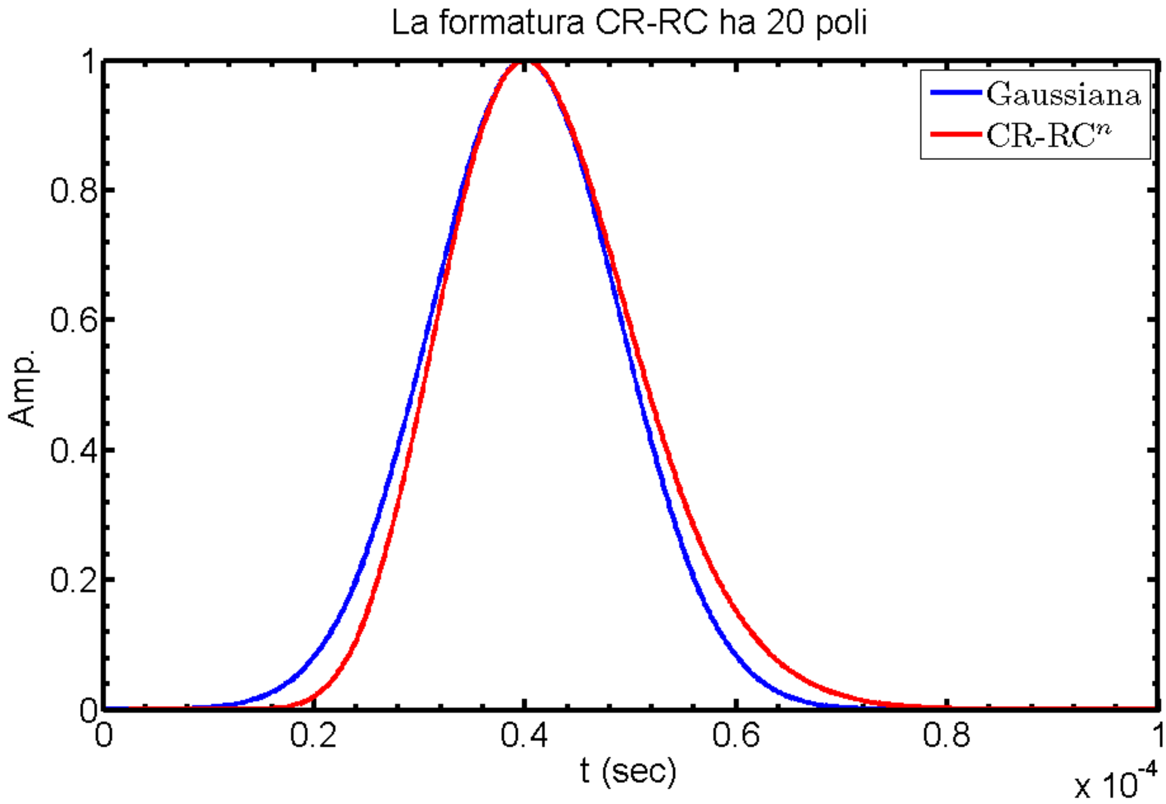
$$\varphi\big(FF(s)\big) = n\,\mathrm{arctn}(\omega\,\tau_o/\sqrt{n}) \underset{\omega\text{ piccoli}}{\approx} \tau_o\sqrt{n}\,\omega$$

Per cui se nella gaussiana poniamo:

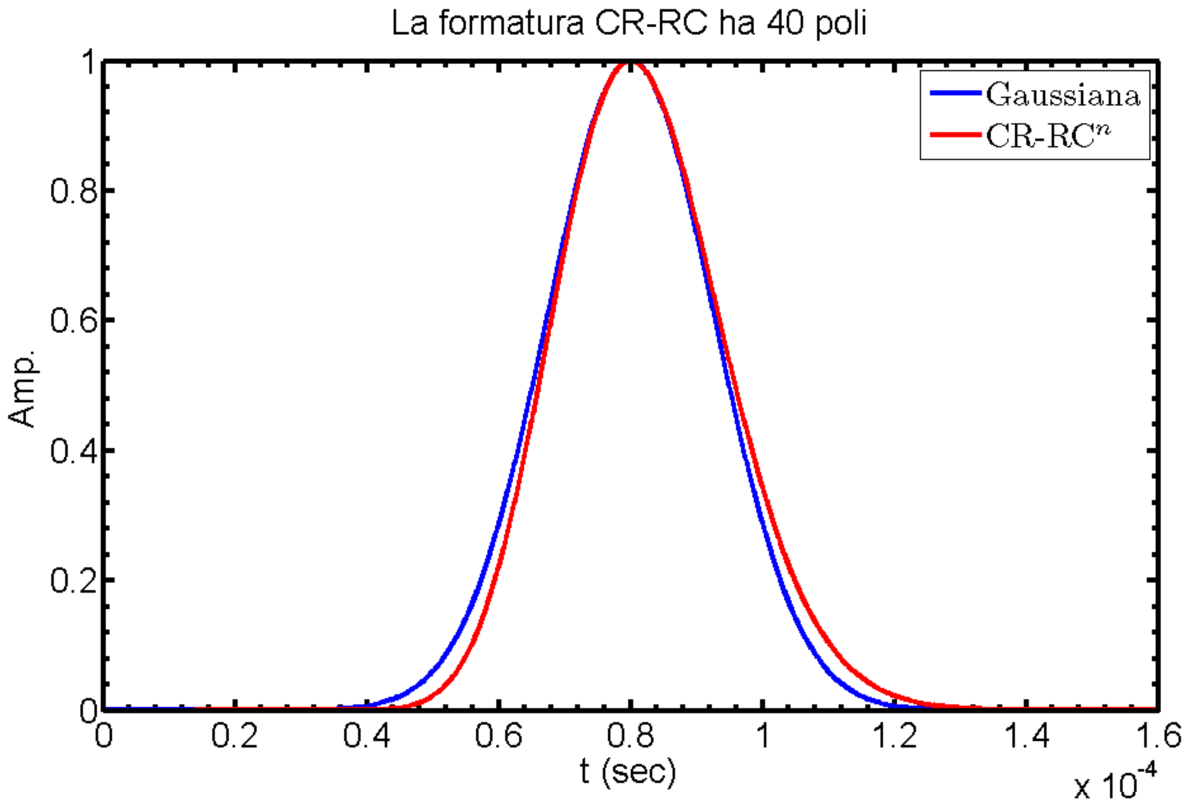
$$\text{ritardo} \approx \tau_o\sqrt{n}$$

Abbiamo che:

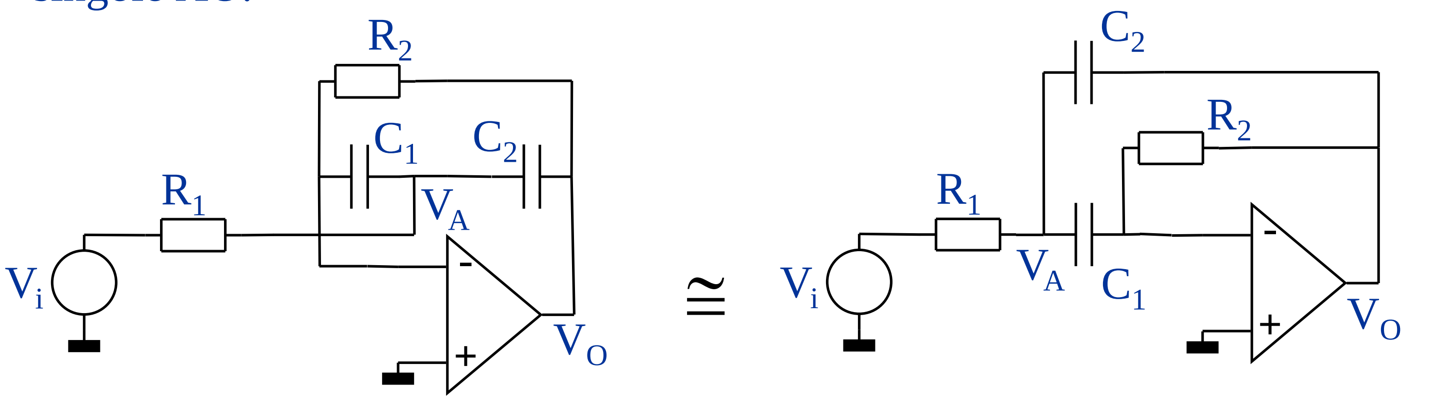
$$\frac{\alpha\,\tau_o/\sqrt{n}}{(s\,\tau_o/\sqrt{n}+1)^{\,n+1}} \quad\rightarrow\quad \tau_o\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{\tau_o{}^2}{2}\omega^2}\,e^{-j\omega\,\tau_o\sqrt{n}}$$



Esempi



Vediamo un esempio di applicazione di filtro formatore basato sull'uso di un singolo AO.



$$\begin{cases} \dfrac{V_i - V_A}{R_1} = (V_A - V_O)\, sC_2 + V_A sC_1 \\ V_A sC_1 = -\dfrac{V_O}{R_2} \end{cases} \Rightarrow \quad V_A = -\frac{V_O}{sC_1 R_2}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_i}{R_1} &= V_A\left(\frac{1}{R_1} + s(C_1 + C_2)\right) - V_O sC_2 \\ &= -\left[\frac{1 + s(C_1 + C_2)R_1}{sC_1R_1R_2} + sC_2\right] V_O \\ &= -\left[\frac{1 + s(C_1 + C_2)R_1 + s^2 C_1C_2R_1R_2}{sC_1R_1R_2}\right] V_O \end{aligned}$$

Quindi:

$$V_O = -\frac{sC_1R_2}{1 + s(C_1 + C_2)R_1 + s^2C_1C_2R_1R_2} V_i$$

Isoliamo il termine in s^2 al denominatore:

$$V_O = -\frac{s/C_2R_1}{s^2 + s\frac{C_1 + C_2}{C_1C_2R_2} + \frac{1}{C_1C_2R_1R_2}} V_i$$

Poniamo ora: $C_1=C_2$ ed anche $R_1=R_2$ e chiamiamo $\tau=R_1C_1$:

$$V_O = -\frac{s/\tau}{s^2 + s\frac{2}{\tau} + \frac{1}{\tau^2}} V_i$$
$$= -\frac{s/\tau}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^2} V_i$$
$$= -\frac{s\tau}{(s\tau + 1)^2} V_i$$

Abbiamo implementato una formatura RC-CR impiegando un solo AO.

Formtaure semi-gaussiano vengono realizzate con l’ausilio dei filtri attivi. Di solito si realizza un filtro passa-alto CR “standard” seguito da un filtro ad n poli RC attivo.